УДК 512.555.2

В. Я. Бурдюк

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

НЕАРХІМЕДОВО УПОРЯДКОВАНІ ПАРИ ПОЛІНОМІВ

Запропоновано визначення неархімедово упорядкованої пари елементів упорядкованого моноїда. Сформульовано і доведено необхідні та достатні умови бути неархімедово упорядкованою парою елементів для лінійно упорядкованого кільця поліномів.

Предложено определение неархимедово упорядоченной пары элементов упорядоченного моноида. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия быть неархимедово упорядоченной парой элементов для линейно упорядоченного кольца полиномов.

Definition of the nonarchimedean ordered pair is proposed. All nonarchimedean ordered pairs of the polynomials are discovered.

Ключові слова: упорядкована пара, неархімедове упорядкування, поліноми.

Вступ. Вважається, що елементи a та b упорядкованого моноїда [1] утворюють упорядковану пару (a,b), якщо $a<b$. Ми називаємо упорядковану пару (a,b) неархімедово упорядкованою, якщо для неї виконується таке:

$$0<a<b\wedge a+a<b\wedge a+a+a<b\wedge\ldots .$$

Упорядкований моноїд є, за означенням, неархімедово упорядкованим, якщо в ньому існують неархімедово упорядковані пари. Природно постає задача про виявлення всіх неархімедово упорядкованих пар елементів неархімедово упорядкованого моноїда. Цю задачу ми розглядаємо для неархімедово упорядкованого кільця поліномів, скориставшись добре відомими результатами [2] щодо неархімедово упорядкованого поля гіпердійсних чисел.

Лінійно упорядковане кільце поліномів

Нехай Z є множиною цілих чисел, а A -- числова надмножина множини Z, замкнена відносно операцій додавання, множення та віднімання, причому на A зафіксовано лінійний порядок $\le$, узгоджений з операціями додавання та множення. Множиною A є, наприклад, множина дійсних чисел. Виокремлюємо такі відображення $f:A\to A$, як:

1) a_x, якщо $\exists a\in A\forall x\in A\ f(x)=a$,

тож a_x -- це константні перетворення множини A, такі як $-1_x, 0_x, 1_x$; перетворення 0_x називаємо *нуль-поліномом*;

2) x^n, якщо $\forall x\in A\ f(x)=x^n$, де n -- натуральне число,

тож x^0 -- це ще одне ім'я для перетворення 1_x, а x^1 -- це ім'я тотожного перетворення id_A;

3) $P_n(x)=a_{x0}\cdot x^0+a_{x1}\cdot x^1+\ldots+a_{xn}\cdot x^n$, де $a_{xn}\neq 0_x$;

зазвичай пишуть $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, маючи на увазі числові коефіцієнти $a_0,a_1,\ldots,a_n\in A$ та називаючи *старшим одночленом полінома* $P_n(x)$ одночлен a_nx^n, *молодшим* -- одночлен a_mx^m, якщо $a_m\neq 0$ та $a_0=a_1=\ldots=a_{m-1}=0$, тож $m\le n$; у випадку $m=n$ поліном $P_n(x)$ є фактично одночленом a_nx^n. Бачимо, що для кожного значення предметної змінної $x\in A$ обчислення значення поліномів $P_n(x)$ може відбуватися за допомогою операцій, визначених на множині A.

Над поліномами $P(x)$, тобто над нуль-поліномом та поліномами $P_n(x)$, здійснюють операції додавання, множення та віднімання, причому 0_x та 1_x відіграють роль констант нуля та одиниці відповідно. Отже, для поліномів

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

$$Q_r(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_rx^r$$

© *В. Я. Бурдюк, 2013*

маємо $P_n(x)\pm Q_r(x)=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+\ldots+(a_k\pm b_k)x^k$,

де $k=\max(n,r)$;

множення цих самих поліномів здійснюють так: беруть загальну суму попарних добутків одночленів із $P(x)$ та $Q(x)$, а потім приводять подібні члени, тож

$$P_n(x)\cdot Q_r(x)=a_0\cdot b_0+(a_0\cdot b_1+a_1\cdot b_0)x+\ldots+a_n\cdot b_r\cdot x^{n+r}.$$

Майже очевидною є

Теорема 1. Якщо a_mx^m, b_qx^q -- молодші одночлени поліномів $P_n(x)$ та $Q_r(x)$ відповідно, то молодшим одночленом полінома $P_n(x)\cdot Q_r(x)$ буде одночлен $a_m\cdot b_q\cdot x^{m+q}$.

На множині $A[x]$ всіх поліномів, коефіцієнти яких належать множині A, існує природне відношення порядку $\le$, де

$$P(x)\le Q(x)\Leftrightarrow \forall z\ P(z)\le Q(z).$$

Але це відношення порядку $\le$ не є лінійним порядком. Тому на $A[x]$ вводять інше відношення порядку $\prec$, яке вже є строгим лінійним порядком, про що і йдеться нижче.

Одночлен a_mx^m називають *від'ємним* (*додатним*) і пишуть $a_mx^m\prec 0_x$ (відповідно $0_x\prec a_mx^m$), якщо його коефіцієнт a_m є від'ємним (відповідно додатним) числом. Поліном $P_n(x)$ називають *від'ємним* (*додатним*) і пишуть $P_n(x)\prec 0_x$ (відповідно $0_x\prec P_n(x)$), якщо його молодший одночлен є від'ємним (відповідно додатним), тож лише нуль-поліном 0_x не є ні від'ємним, ні додатним.

Для довільних поліномів $P(x)$ та $Q(x)$ визначають

$$P(x)\prec Q(x)\ \Leftrightarrow\ P(x)-Q(x)\prec 0_x.$$

Теорема 2. Відношення $\prec$ на множині $A[x]$ є строгим лінійним порядком, узгодженим з операціями додавання та множення поліномів.

Доведення. Маємо $P(x)\prec P(x)\Leftrightarrow 0_x\prec 0_x$. Але ж хибним є твердження $0_x\prec 0_x$, а тому твердження $\neg(P(x)\prec P(x))$ буде істинним. Отже, відношення $\prec$ на множині $A[x]$ є антирефлексивним.

Нехай тепер виконується $P(x)\prec Q(x)$ та $Q(x)\prec R(x)$, а тому

$$P(x)-Q(x)\prec 0_x \text{ та } Q(x)-R(x)\prec 0_x.$$

Звідси отримуємо $(P(x)-Q(x))+(Q(x)-R(x))\prec 0_x+0_x$,

тобто $P(x)-R(x)\prec 0_x$. Отже, відношення $\prec$ на множині $A[x]$ є і антирефлексивним, і транзитивним, тобто є відношенням строгого порядку, причому цей порядок є лінійним, адже якщо $P(x)\ne Q(x)$, то $P(x)-Q(x)\ne 0_x$, і тому:

або $0_x\prec P(x)-Q(x)$, тобто $Q(x)\prec P(x)$,

або $P(x)-Q(x)\prec 0_x$, тобто $P(x)\prec Q(x)$.

Порядок $\prec$ буде узгодженим із операцією множення, якщо

1) $P(x)\prec Q(x)\wedge 0_x\prec R(x)\Rightarrow P(x)\cdot R(x)\prec Q(x)\cdot R(x)$,
2) $P(x)\prec Q(x)\wedge R(x)\prec 0_x\Rightarrow Q(x)\cdot R(x)\prec P(x)\cdot R(x)$.

Маємо

$$P(x)\cdot R(x)\prec Q(x)\cdot R(x)\Leftrightarrow (P(x)-Q(x))\cdot R(x)\prec 0_x.$$

Але ж теорема 1 свідчить: добуток поліномів буде *від'ємним* (*додатним*), якщо і тільки якщо молодші одночлени цих поліномів мають протилежні (відповідно однакові) знаки, тож із $P(x) \prec Q(x)$ випливає таке:

$$P(x)\cdot R(x) \prec Q(x)\cdot R(x) \text{ у випадку } 0_x \prec R(x), \text{ але}$$

$$Q(x)\cdot R(x) \prec P(x)\cdot R(x) \text{ -- у випадку } R(x) \prec 0_x .$$

Узгодженість відношення $\prec$ з операцією додавання перевіряється тривіально. *Кінець доведення.*

Неархімедово упорядковані пари поліномів

За означенням, неархімедово упорядкована пара поліномів $(P(x), Q(x))$ має властивість

$$0_x \prec P(x) \prec Q(x) \ \wedge \forall k \geq 2 \left(k \cdot P(x) \prec Q(x)\right),$$

тож поліномами із цієї пари можуть бути лише $P_n(x)$ та $Q_r(x)$ із додатними молодшими одночленами $a_m x^m$ та $b_q x^q$ відповідно, тож $0 < a_m$, $0 < b_q$ та

$$0_x \prec Q_r(x) - k \cdot P_n(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + (b_m - k \cdot a_m)x^m + \ldots \qquad (*)$$

для кожного $k \geq 2$, і тому при $q < m$ співвідношення (*) виконується, а при $m \leq q$ для виконання співвідношення (*) потрібно вимагати виконання $0 < b_m - k \cdot a_m$ для кожного $k \geq 2$, що, за аксіомою Архімеда, є неможливим у полі дійсних чисел.

Таким чином, нами доведено таку теорему:

Теорема 3. Поліноми $P_n(x)$ та $Q_r(x)$ утворюють неархімедово упорядковану пару $(P_n(x), Q_r(x))$ в лінійно упорядкованому кільці поліномів, якщо і тільки якщо їх молодші одночлени $a_m x^m$ та $b_q x^q$ мають властивість

$$0 < a_m \ \wedge \ 0 < b_q \ \wedge \ 0 \leq q < m .$$

Наслідок 1. Для поліномів $Q_r(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r$, що мають додатний вільний член b_0, такі два твердження є логічно еквівалентними:

1) упорядкована пара поліномів $(P_n(x), Q_r(x))$ є неархімедово упорядкованою;

2) молодший одночлен $a_m x^m$ полінома $P_n(x)$ є додатним одночленом та $m > 0$.

Наслідок 2. Для кожного $m > 0$ маємо неархімедово упорядковану пару поліномів $(x^m, 1_x)$.

Висновки

1. У роботі запропоновано означення неархімедово упорядкованої пари елементів упорядкованого моноїду, а для лінійно упорядкованого кільця поліномів сформульовано і доведено необхідні та достатні умови бути неархімедово упорядкованою парою його елементів.
2. Побудовано багато конкретних неархімедово упорядкованих пар поліномів.
3. Цікаво було б зробити це ж саме і для інших упорядкованих алгебраїчних систем.

Бібліографічні посилання

1. **Бурдюк В. Я.** Абстрактні множини: моногр. / В. Я. Бурдюк. – Д.: Ліра, 2012. – 160 с.
2. **Успенский В. А.** Что такое нестандартный анализ? / В. А. Успенский. – М.: Наука, 1987. – 128 с.

Надійшла до редакції 22.05.2013 р.