УДК 519.8

В.М. Богомаз, О.В. Богомаз
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ В ОДНОМУ КЛАСІ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Робота присвячена проблемі знаходження ефективних розв'язків в одному класі задач векторної оптимізації з фазовими обмеженнями. Запропоновано алгоритм апроксимації таких розв'язків.

Работа посвящена проблеме поиска эффективных решений в одном классе задач векторной оптимизации с фазовыми ограничениями. Предложен алгоритм аппроксимации таких решений.

The paper is sanctified to the problem of search of effectiv solution in one class of vector optimization problem with state constraints. The algorithm of approximation of such solutions is proposed.

Ключові слова: векторна оптимізація, фазові обмеження, апроксимація.

Вступ. Як відомо, динамічні системи є математичними моделями багатьох реальних фізичних процесів та об'єктів (наприклад, нестійкі процеси у вібраційних машинах). Для визначення ефективних технологічних процесів роботи таких систем широко залучаються задачі оптимізації з нескалярним показником якості. Особливий інтерес серед такого класу задач викликають ті, в яких цільове відображення діє у функціональний простір.

У цій роботі розглядаються задачі векторної оптимізації, для яких характерні такі особливості: цільове відображення є напівнеперервним знизу та діє в простір інтегрованих функцій, стан системи описується системою диференціальних рівнянь першого порядку, ефективні розв'язки розглядаються як елементи нерефлексивних просторів, наявні фазові обмеження. Як відомо із [2], у таких задачах доречно знаходити (Λ,μ)-ефективні розв'язки, які залучають топологічні властивості простору образів цільового відображення. Основною метою цієї роботи є дослідження питання побудови (Λ,μ)-ефективних розв'язків в означеному класі задач векторної оптимізації та створення алгоритмів апроксимації таких розв'язків.

Основні поняття та постановка задачі. Розглянемо таку задачу векторної оптимізації з фазовими обмеженнями:

$$I(u,x)=j(t,u(t),x(t))\longrightarrow\inf{}^{\Lambda,\mu}, \tag{1.1}$$

$$\dot{x}=g(t,u,x) \text{ на } (0,T), \tag{1.2}$$

$$u\in U, \tag{1.3}$$

$$x(0)=x_0, \tag{1.4}$$

$$l(x(t))\le\alpha(t) \text{ на } (0,T). \tag{1.5}$$

Нехай допустимі керування $u\in U$ є елементами простору $L^1(0,T;R^m)$, та позначимо через $x\in W^{1,1}(0,T;R^n)$ відповідні їм функції стану. Нехай множина U є непорожньою та слабко компактною. Нехай є заданими початкові умови для розв'язків диференціальних рівнянь (1.2) $x_0\in R^n$. Відображення $l:W^{1,1}(0,T;R^n)\to L^1(0,T;R^n)$ є нелінійним, неперервним та α є заданим елементом простору $L^1(0,T)$. Унаслідок вкладення $W^{1,1}(0,T)\subset C(0,T)$ (див. [1]) розглянемо на просторі $L^1(0,T;R^m)\times W^{1,1}(0,T;R^n)$ топологію τ, яка являє собою добуток слабкої топології в $L^1(0,T;R^m)$ та топології рівномірної збіжності в $W^{1,1}(0,T;R^n)$. Для подальшого дослідження припустимо, що відображення $j:(0,T)\times R\times R\to R$ задовольняє таким властивостям:

(i) j є вимірним за Лебегом відносно трьох змінних;

(ii) j є напівнеперервним знизу на $R^m\times R^n$ для майже всіх $t\in(0,T)$, тобто для кожної послідовності $\{(u_k,x_k)\}_{k\in N}$ такої, що $(u_k,x_k)\xrightarrow{\tau}(u,x)$, маємо

$$\lim_{k\to\infty} \inf\left(t,u_k(t),x_k(t)\right) \geq j\left(t,u(t),x(t)\right);$$

(iii) j є опуклим відносно u для всіх x та майже всіх t;

(iv) j є невід'ємним.

Будемо вважати, що образи цільового відображення $I(u,x)$ належать до простору $L^1(0,T)$, який наділено слабкою топологією μ. Нехай частковий порядок у просторі $L^1(0,T)$ введено за допомогою конуса невід'ємних елементів: $\Lambda := \left\{ f \in L^1(0,T) \mid f(t) \geq 0 \text{ м.с. } t \in (0,T) \right\}$. Квазі-внутрішність конуса, спряженого до Λ, має вигляд $\Lambda_0^* := \left\{ f \in L^\infty(0,T) \mid \langle f,y \rangle > 0, \forall y \in \Lambda \setminus \{0\} \right\}$.

Нехай праві частини диференціальних рівнянь (1.2) мають загальний вигляд

$$g(t,u,x) = a(t,x) + b(t,x)u, \tag{1.6}$$

де відображення $a:(0,T)\times R^n \to R^n$ та $b:(0,T)\times R^n \to R^m$:

1) є вимірними за Лебегом відносно t для будь-яких x;

2) є неперервними за x для майже всіх $t \in (0,T)$;

3) існують такі функції $\alpha, \beta \in L^1(0,T)$ та константи $c,d > 0$, що для будь-яких $x_1, x_2 \in R^n$ виконуються такі нерівності:

$$\|a(t,x_1) - a(t,x_2)\|_{\mathrm{P}^n} \leq \alpha(t)\|x_1 - x_2\|_{\mathrm{P}^n},\ \|a(t,0)\|_{\mathrm{P}^n} \leq \beta(t),$$

$$\|b(t,x_1) - b(t,x_2)\|_{\mathrm{P}^n} \leq c\|x_1 - x_2\|_{\mathrm{P}^n},\ \|b(t,0)\|_{\mathrm{P}^n} \leq d.$$

Введемо до розгляду такі множини:

$$\Xi = \left\{ (u,x) \in L^1\left(0,T;R^m\right) \times W^{1,1}\left(0,T;R^n\right) \mid \dot{x} = g(t,u,x), u \in U,\ x(0) = x_0 \right\}, \tag{1.7}$$

$$\Xi_\alpha = \left\{ (u,x) \in L^1\left(0,T;R^m\right) \times W^{1,1}\left(0,T;R^n\right) \mid \dot{x} = g(t,u,x), u \in U,\ x(0) = x_0, l(x) \leq \alpha \right\}. \tag{1.8}$$

Наведемо поняття (Λ,μ)-ефективного розв'язку задачі (1.1) – (1.5)

Означення 1 [2]. Пара $(u^*,x^*) \in \Xi_\alpha$ називається (Λ,μ)-ефективним розв'язком задачі (1.1)–(1.5), якщо виконується умова $(I(u^*,x^*) - \Lambda) \cap cl_\mu I(\Xi_\alpha) = \{I(u^*,x^*)\}$. Множину всіх (Λ,μ)-ефективних розв'язків задачі (1.1) – (1.5) будемо позначати через $Eff_{\tau\times\mu}(\Xi_\alpha; I; \Lambda)$.

Алгоритм апроксимації ефективних розв'язків у задачі.

Твердження 1. Нехай Ξ є непорожньою та τ-замкненою множиною. Тоді підмножина Ξ_α є τ-замкненою.

Доведення. Якщо $\Xi_\alpha = \varnothing$, то умови твердження є очевидними. Отже, припустимо, що Ξ_α є непорожньою. Розглянемо довільну послідовність $(u_n,x_n) \in \Xi_\alpha$ таку, що $(u_n,x_n) \xrightarrow{\tau} (u,x)$. Якщо Ξ є τ-замкненою, то маємо $(u,x) \in \Xi$. Необхідно довести, що виконується обмеження $l(x(t)) \leq \alpha$. Внаслідок неперервності відображення l маємо $\lim_{n\to\infty} l(x_n) = l(x)$. Таким чином, виконується співвідношення $l(x) \leq_\Lambda \alpha$ та, відповідно, умова $(u,x) \in \Xi_\alpha$. Отже, Ξ_α є τ-замкненою, що завершує доведення твердження 1.

Для подальших досліджень припустимо, що множина Ξ_α є непорожньою.

Для апроксимації (Λ,μ)-ефективних розв'язків задачі (1.1) – (1.5) розглянемо таку послідовність задач векторної оптимізації:

$$F_\varepsilon(u,x) = j(t,u,x) + \frac{1}{\varepsilon} h(u,x), \tag{2.1}$$

$$(u,x) \in \Xi, \tag{2.2}$$

де $h(u,x) = \left(\left|l(x) - \alpha\right| + l(x) - \alpha\right)$, $\varepsilon > 0$ - фіксований параметр штрафу.

Як було доведено в [6], послідовність розв'язків задачі (2.1) - (2.2) збігається до (Λ,μ)-ефективного розв'язку задачі (1.1) - (1.5). Відображення $F_\varepsilon(u,x)$ є напівнеперервним знизу як сума неперервного та напівнепе-рервного знизу відображень $h(u,x)$ та $I(u,x)$ відповідно. Очевидно, що для всіх $\varepsilon > 0$ виконуються такі співвідношення:

$$F_\varepsilon(u,x)=j(t,u,x)\ \forall(u,x)\in\Xi_\alpha \quad \text{та} \quad F_\varepsilon(u,x)\geq_\Lambda j(t,u,x)\forall(u,x)\in\Xi\setminus\Xi_\alpha.$$

Для пошуку (Λ,μ)-ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації (1.1)-(1.5) розглянемо задачу мінімізації лінійної згортки відображення $F_\varepsilon(u,x)$:

$$J_\varepsilon(u,x)=\langle\varphi,F_\varepsilon(u,x)\rangle_{L^1(0,T)}\longrightarrow \inf_{(u,x)\in\Xi}, \tag{2.3}$$

де елемент $\varphi\in\Lambda_0^*$ такий, що $\|\varphi\|_{L^\infty(0,T)}=1$.

За вихідними припущеннями, відображення $j(t,u,x)$ задовольняє умовам (i)-(iv). Отже, функціонал $J_\varepsilon(u,x)$ є секвенційно напівнеперервним знизу відносно τ-топології у просторі $L^1(0,T;R^m)\times W^{1,1}(0,T;R^n)$ (див. теорему 3 у [3]). Як відомо з теорії диференціальних рівнянь, множина розв'язків рівнянь (1.2)-(1.4) є компактом у просторі $W^{1,1}(0,T;R^n)$ відносно топології рівномірної збіжності. Отже, можна стверджувати, що множина Ξ є τ-компактною. Розв'язуваність задачі мінімізації (2.3) при кожному $\varepsilon>0$ є наслідком залучення прямого методу варіаційного числення до неї.

Для фіксованих параметрів $\varepsilon>0$ та $\gamma\in R$ визначимо таку множину: $\Theta_{\varepsilon,\gamma}=\{(u,x)\in\Xi \mid J_\varepsilon(u,x)\leq\gamma\}$. Якщо припустити, що $(u^*,x^*)\in\Xi$ є розв'язком задачі мінімізації (2.3) при фіксованому $\varepsilon>0$ та $\gamma^*=J_\varepsilon(u^*,x^*)$, то є очевидним, що $\Theta_{\varepsilon,\gamma^*}$ являє собою множину всіх розв'язків задачі (2.3).

Твердження 2. Нехай $\gamma,\gamma_1,\gamma_2\in R_+$ та $\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2\in R_+$ є заданими. Тоді є вірними твердження:

(a) $\gamma<0\Rightarrow\Theta_{\varepsilon,\gamma}=\varnothing,\forall\varepsilon>0$;

(b) $\gamma_1\leq\gamma_2\Rightarrow\Theta_{\varepsilon,\gamma_1}\subseteq\Theta_{\varepsilon,\gamma_2},\forall\varepsilon>0$;

(c) $\varepsilon_1\leq\varepsilon_2\Rightarrow\Theta_{\varepsilon_1,\gamma}\subseteq\Theta_{\varepsilon_2,\gamma},\forall\gamma\in R$;

(d) якщо Ξ є τ-замкненим, то $\Theta_{\varepsilon,\gamma}$ також є τ-замкненим.

Доведення. Згідно з припущенням (iv) відображення j є невід'ємним відносно конуса Λ та для кожного $\varepsilon>0$ виконується вкладення $h(u,x)\subset\Lambda$. Отже, завжди виконується умова $F_\varepsilon(u,x)\subset\Lambda$. Таким чином, функціонал $J_\varepsilon(u,x)$ є додатним для всіх $\varepsilon>0$ та $(u,x)\in\Xi$, тобто твердження (a) є вірним.

Умова (b) є очевидною.

Для доведення умови (c) припустимо, що $\varepsilon_1\leq\varepsilon_2$. Тоді виконується умова $F_{\varepsilon_1}(u,x)\geq_\Lambda F_{\varepsilon_2}(u,x)$ для всіх $(u,x)\in\Xi$, звідки випливає нерівність $J_{\varepsilon_1}(u,x)\geq J_{\varepsilon_2}(u,x)$, яка є справедливою для всіх пар (u,x) із множини Ξ. Отже, $\Theta_{\varepsilon_1,\gamma}\subseteq\Theta_{\varepsilon_2,\gamma},\forall\gamma\in R$, що підтверджує справедливість твердження (c).

Для доведення твердження (d) припустимо, що $\gamma\geq0$. Нехай $\{(u_k,x_k)\}_{k\in N}\subset\Theta_{\varepsilon,\gamma}$ така, що $(u_k,x_k)\xrightarrow{\tau}(u^*,x^*)$. Доведемо, що $(u^*,x^*)\in\Theta_{\varepsilon,\gamma}$. Оскільки множина Ξ є τ-замкненою, то $(u^*,x^*)\in\Xi$. За означенням множини $\Theta_{\varepsilon,\gamma}$ послідовність $\{(u_k,x_k)\}_{k\in N}$ задовольняє умові $J_\varepsilon(u_k,x_k)\leq\gamma$ для всіх $k\in N$. Ураховуючи напівнеперервність знизу відображення $J_\varepsilon(u,x)$, маємо $J_\varepsilon(u^*,x^*)\leq\liminf_{k\to\infty}J_\varepsilon(u_k,x_k)\leq\gamma$, $\forall\varepsilon>0$.

Отже, $(u^*,x^*)\in\Theta_{\varepsilon,\gamma}$, що і доводить справедливість твердження (d).

Очевидно: якщо послідовність $(\gamma_k)_{k\in N}$ є невід'ємною та незростаючою, то при фіксованому $\varepsilon>0$ виконується вкладення $\Theta_{\varepsilon,\gamma_{k+1}}\subseteq\Theta_{\varepsilon,\gamma_k}$ для всіх $k\in N$. За аналогією при фіксованому γ та монотонно незростаючій послідовності $(\varepsilon_k)_{k\in N}$ такій, що $\varepsilon_k\to0$, маємо $\Theta_{\varepsilon_{k+1},\gamma}\subseteq\Theta_{\varepsilon_k,\gamma}$ (див. умову (c) твердження 2). Позначимо послідовність відповідних множин через $\{\Theta_k\}_{k\in N}$. Для подальших досліджень введемо поняття збіжності послідовності множин за Куратовським.

Означення 2. Нехай (X,τ) - довільний топологічний простір та $(\Theta_k)_{k\in N}$ - довільна послідовність його підмножин. Тоді нижньою та верх-ньою секвенційними границями послідовності множин $(\Theta_k)_{k\in N}$ називають множини

$$K_\tau - \liminf \Theta_k = \left\{ x \in X \mid \exists (x_k) \xrightarrow{\tau} x, \exists k_0 \in N, \forall k \ge k_0, x_k \in \Theta_k \right\},$$

$$K_\tau - \limsup \Theta_k = \left\{ x \in X \mid \exists (x_k) \subset \Theta_k, k \to \infty, x_k \xrightarrow{\tau} x \right\}$$

відповідно. Кажуть, що послідовність $(\Theta_k)_{k\in N}$ збігається за Куратовським до множини Θ, якщо виконується умова $\Theta = K_\tau - \liminf\limits_{k\to\infty} \Theta_k = = K_\tau - \limsup\limits_{k\to\infty} \Theta_k$.

Теорема 1

(i) Нехай $(\gamma_k)_{k\in N} \subset R_+$ – монотонно незростаюча послідовність така, що $\gamma_k \to \gamma^*$, $\gamma^* > 0$, та $\Theta^* \ne \varnothing$ для заданого параметра $\varepsilon > 0$. Тоді послідовність множин $(\Theta_k)_{k\in N}$ збігається до Θ^* в сенсі Куратовського.

(ii) Нехай $0 \le \gamma < \infty$ є заданим параметром та послідовність (ε_k) є монотонно незростаючою і такою, що $\varepsilon_k \to 0$. Якщо послідовність $(\Theta_k)_{k\in N}$ збігається за Куратовським до $\Theta^* \ne \varnothing$, то множина Ξ_α є непорожньою.

Доведення. Для доведення твердження (i) оберемо послідовність $(u_k, x_k) \in \Xi$ таку, що $(u_k, x_k) \in \Theta_k$ $\forall k \in N$ та $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^*, x^*)$. Це можливо, оскільки для всіх $k \in N$ виконується умова $\Theta_{k+1} \subseteq \Theta_k$ та за вихідними припущеннями $\Theta^* \ne \varnothing$. Оскільки множина Ξ є τ-ком-пактною, то $(u^*, x^*) \in \Xi$. Унаслідок секвенційної напівнеперервності знизу відображення F_ε для кожних обраних $\varphi \in \Lambda_0^*$ та $\varepsilon > 0$ виконуються співвідношення

$$J_\varepsilon(u^*, x^*) \le \liminf_{k\to\infty} J_\varepsilon(u_k, x_k) \le \liminf_{k\to\infty} \gamma_k = \gamma^*.$$

Отже, $(u^*, x^*) \in \Theta^*$. З іншого боку, нехай $(u^*, x^*) \in \Theta^*$ є заданою парою. Можна показати, що існує послідовність $\{(u_k, x_k)\}_{k\in N} \subset \Xi$ така, що $\{(u_k, x_k)\}_{k\in N} \subset \Theta_k$ та $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u^*, x^*)$. За необхідностю, можна обрати стаціонарну послідовність $(u_k, x_k) = (u^*, x^*)$ $\forall k \in N$. Отже, виконується умова $\Theta = K_\tau - \liminf\limits_{k\to\infty} \Theta_k = K_\tau - \limsup\limits_{k\to\infty} \Theta_k$, що доводить твер-дження (i).

Розглянемо доведення твердження (ii). Нехай $\Theta^* \ne \varnothing$ та до цієї множини входять елементи, які не задовольняють фазовим обмеженням (1.5). Зафіксуємо один із таких елементів (u, x). Тоді згідно з означенням 2 існує послідовність $(u_k, x_k) \in \Theta_k$ $\forall k \in N$ така, що $(u_k, x_k) \xrightarrow{\tau} (u, x)$. Таким чином, ця послідовність для фіксованого $0 \le \gamma < \infty$ задовольняє умові $J_{\varepsilon_k}(u_k, x_k) \le \gamma$ при всіх $k \in N$. Ураховуючи подання функціоналу $J_\varepsilon(u, x)$, маємо нерівність

$$\langle \varphi, I(u_k, x_k) \rangle_{L^1(0,T)} + \varepsilon_k^{-1} \langle \varphi, h(u_k, x_k) \rangle_{L^1(0,T)} \le \gamma, \ \forall k \in N. \tag{2.4}$$

Ураховуючи припущення $(u, x) \notin \Xi_\alpha$ та переходячи до границі при $k \to \infty$ в лівій частині співвідношення (2.4), маємо $\lim\limits_{k\to\infty} J_{\varepsilon_k}(u_k, x_k) = +\infty$. А це суперечить умові (2.4). Отже, $\Theta^* \subseteq \Xi_\alpha$ та $\Xi_\alpha \ne \varnothing$, що і доводить твердження (ii).

Теорема 2. Нехай Ξ_α – непорожня та Ξ – τ-компактна множини. Відображення j задовольняє умовам (i) – (iv), тоді для кожної незростаючої послідовності додатних чисел такої, що $\varepsilon_k \to 0$, існує послідовність $(u_k, x_k) \in \operatorname*{arg\,min}\limits_{(u,x)\in\Xi} J_\varepsilon(u, x)$, яка збігається до (Λ, μ)-ефективного розв'язку задачі (1.1) – (1.5).

Доведення. Нехай $(\varepsilon_k) \subset R_+$ – монотонно незростаюча послідовність така, що $\varepsilon_k \to 0$ та $(u_k, x_k) \in \operatorname*{arg\,min}\limits_{(u,x)\in\Xi} J_\varepsilon(u, x)$. Існування такої послідовності диктується властивістю напівнеперервності функціоналу $J_\varepsilon(u,x)$ та τ-компактності множини Ξ. За τ-компактністю множини Ξ, з точністю до підпослідовності, маємо $(u_k,x_k)\xrightarrow{\tau}(u^*,x^*)\in\Xi$. Оскільки пари (u_k,x_k) є розв'язками задачі (2.3) при відповідних k, то $(u_k,x_k)\in\Theta_k$. Унаслідок умови (ii) теореми 1 послідовність $(\Theta_k)_{k\in N}$ збігається за Куратовським до $\Theta^*\subseteq\Xi_\alpha$. Отже, $(u^*,x^*)\in\Xi_\alpha$. Доведемо, що (u^*,x^*) є (Λ,μ)-ефективним розв'язком задачі (1.1) – (1.5). Для цього припустимо, що існує інша пара $(\hat{u},\hat{x})\in\Xi_\alpha$ така, що $J(\hat{u},\hat{x})<J(u^*,x^*)$. Але з іншого боку, маємо такі нерівності:

$$J_\varepsilon(\hat{u},\hat{x})\equiv J(\hat{u},\hat{x})\geq\inf_{(u,x)\in\Xi}J_\varepsilon(u,x)=J_\varepsilon(u^*,x^*),\ \forall\varepsilon>0.$$

Переходячи до границі при $k\to\infty$, маємо $J(\hat{u},\hat{x})\geq\ \geq\liminf_{\varepsilon\to 0}J_\varepsilon(u_k,x_k)\geq J(u^*,x^*)$, що призводить до протиріччя. Отже, (u^*,x^*) є розв'язком задачі (2.3) та (Λ,μ)-ефективним розв'язком задачі векторної оптимізації (1.1) – (1.5) (див. теорему 4.1 у [2]).

Висновки. Для означеного класу задач векторної оптимізації в нерефлексивних просторах із фазовими обмеженнями запропоновано схему апроксимації ефективних розв'язків, із залученням ідеї методу штрафів. Визначено секвенційні властивості послідовності множин розв'язків скалярних задач мінімізації при монотонно незростаючому параметрі штрафу. Наведено алгоритм побудови послідовності розв'язків відповідних скаляр-них задач зі штрафом, яка збігається до (Λ,μ)-ефективного розв'язку вихідної задачі векторної оптимізації з фазовими обмеженнями.

Бібліографічні посилання

1. **Буттацо Дж.** Одномерные вариационные принципы. Введение /Дж. Буттацо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт. – Новосибирск: Науч. кн., 2002. – 248 с.
2. **Kogut P. I.** Topological Aspects of Scalarization in Vector Optimization Problems /P. I. Kogut, R. Manzo, I. V. Nechay // Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7(2)(2010). – P.25–49.
3. **Ioffe A. D.** On Lower Semicontinuity of Integral Functionals, SIAM Journal on Control and Optimization /A.D. Ioffe. – 1977 – Vol. 15, No. 4. – P. 521–538.
4. **Когут О. П.** Оптимізація в нелінійних еліптичних крайових задачах /О. П. Когут, П. И. Когут, О. А. Рядно // Моногр. – Д.: Вид-во ДДФА, 2010. – 236 с.
5. **Треногин В.А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин – М.: Наука, 1980. – 496 с.
6. **Богомаз В. Н.** О разрешимости одной задачи векторной оптимизации с фазовыми ограничениями /В. Н. Богомаз, П. И.Когут // Проблемы управления и информатики. – 2012. – №3. – С. 31–45.

Надійшла до редколегії 01.04.2013 р.