УДК 004.942

М. Є. Сердюк
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО АНАЛІТИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО СПЛАЙНУ МІНІМАЛЬНОЇ ЛОКАЛЬНОЇ КРИВИНИ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ КАРКАСНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Запропонована конструкція шеститочкового інтерполяційного сплайну з покращеними характеристиками кривини на середній частині відрізку його завдання. Отримано аналітичне подання такого сплайну та проведено порівняльний аналіз з відомими сплайнами.

Предложена конструкция шеститочечного интерполяционного сплайна с улучшенными характеристиками кривизны в средней части отрезка его задания. Получено аналитическое представление такого сплайна и проведен сравнительный анализ с известными сплайнами.

The structure of six-point interpolation spline with improved characteristics of curvature is proposed. The analytic representation of such spline is received. The comparative analysis with known splines is performed.

Ключові слова: інтерполяційний сплайн, каркасна інтерполяція, цифрове зображення.

Вступ. Інтерполяція сплайнами широко застосовується в багатьох областях обчислювальної математики. Зокрема, сплайни використовуються для побудови функції зображення в задачах просторової інтерполяції статичних растрових зображень. Шукана функція повинна будуватися з урахуванням вимог, які висуваються до інтерпольованого зображення. До таких вимог відноситься збереження достатньої гладкості контурних ліній (відсутність aliazing-ефекту), різкості та чіткості результуючого зображення. Звідси виникає задача побудови функції за відомими значеннями її в декількох точках так, щоб кривина отриманої лінії була найменшою. Для розв'язання цієї задачі доцільно застосувати саме інтерполяцію поліноміальними сплайнами. У [1] використання інтерполяційного сплайну мінімальної локальної кривини запропоновано для відновлення функції зображення на каркасі, який є наближенням топографічної карти зображення і визначається за певним алгоритмом. При цьому, сплайн будується на шести точках обраного фрагмента каркасу, а конструкція сплайна визначена, виходячи із умови мінімуму кривини отриманої лінії на всьому фрагменті. Але для прогнозування значень функції зображення використовується лише середня частина обраного фрагмента. Отже саме вона має найбільш вагоме значення при відновленні функції зображення. Тому варто розглянути задачу побудови сплайну з покращеними характеристиками кривини у середині відрізку. У даній роботі запропонована конструкція сплайну, який будується за значеннями функції в шести опорних точках за умови мінімуму кривини у середній частині відрізку.

Попередні теоретичні положення. Нехай $\{t_i=(i-1)h\}_{i=1}^{N}$ є рівномірною сіткою на відрізку $[0,W]$. Позначимо через $\widetilde{Z}$ простір числових послідовностей довжини N. Покладемо $Z=H^2(0,W)$. Нехай $T\in L(Z,\widetilde{Z})$ – оператор звуження Z на $\widetilde{Z}$, який означимо як $Tx=\{x(t_1),x(t_2),...,x(t_N)\}$. Нехай Y – деякий гільбертів простір і $B\in L(Z,Y)$ – заданий оператор.

Означення 1. Функцію $f\in Z$ будемо називати (T,B)-сплайном, що відповідає вектору $\widetilde{x}=\{x(t_1),x(t_2),...,x(t_N)\}\in\widetilde{Z}$, якщо виконується наступна умова

$$\|Bf\|=\inf_{x\in T^{-1}(\widetilde{x})}\|Bx\|. \qquad (1)$$

Тут через $T^{-1}(\widetilde{x})$ позначено множину розв'язків наступного операторного рівняння

$$Tx=\widetilde{x}.$$

Позначимо через $N(T)$ і $N(B)$ підпростори нулів для операторів T та B відповідно. Ясно, що кожна з означених множин лежить у просторі Z.

У [3] показано, що якщо лінійна багатоздатність $BN(T)$ є замкненою і при цьому $N(B)\bigcap N(T)=\{0\}$, то для кожного вектора $\widetilde{x}=\{x(t_1),x(t_2),...,x(t_N)\}\in\widetilde{Z}$ знайдеться єдиний (T,B)-інтерполяційний сплайн $f\in Z$. Крім того, показано, що множина $BN(T)$ є замкненою, якщо оператор $B\in L(Z,Y)$ є нормально розв'язним, тобто множина його значень $R(B)$ є замкненою в Y, його підпростір нулів $N(B)$ є скінченно вимірним і при цьому $N(B)\bigcap N(T)=\{0\}$. Отже, задача про (T,B)-інтерполяційний сплайн має єдиний розв'язок, якщо

© *М. Є. Сердюк, 2010*

виконані наступні умови: 1) $R(B)=Y$; 2) $N(B)$ – скінченно вимірна множина; 3) $\tilde{Z}$ – скінченно вимірний простір; 4) $\dim N(B)=k<l=\dim\tilde{Z}$; 5) $N(B)\cap N(T)=\{0\}$.

Постановка задачі. Нехай $\{c_{-3},c_{-2},c_{-1},c_1,c_2,c_3\}$ – заданий масив значень, за якими необхідно побудувати функцію. Для задачі каркасної інтерполяції – це значення функції зображення у пикселах, які обрані за певним алгоритмом як ті, що належать фрагменту лінії рівня зображення. Припускаємо, що відстань між двома будь-якими сусідніми пікселами дорівнює одиниці. Це можливо, якщо метрику означити за наступним правилом:

$$d(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}\ \ \forall x,y\in\overline{\Delta},$$

де $\overline{\Delta}=[0;W]\times[0;H]$ – задана підмножина в R^2. Отже, можна вважати, що $c=\{c_i\}$, $i=-3,-2,...3$ – значення функції зображення в точках $[-5/2,-3/2,-1/2,1/2,3/2,5/2]$. За цими значеннями необхідно спрогнозувати значення функції на інтервалі $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Нехай $Z=H^2\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$, $Y=L^2\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$, $\{t_i=-\frac{7}{2}+i, i=1,...,6\}$ – система опорних точок на відрізку $\left[-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right]$, $x=\{x_i\}_{i=1}^6$ - вектор вхідних даних, для якого виконуються умови

$$x_1=c_{-3},\ x_2=c_{-2},\ x_3=c_{-1},\ x_4=c_1,\ x_5=c_2,\ x_6=c_3,$$

лінійний неперервний оператор $B\in L(D(B),Y)$ задається правилом

$$Bx(t)=x''(t),\ x(t)\in D(B).$$

Уведемо оператор *B* наступним чином. Будемо казати, що функція $s(t)$ належить області визначення $D(B)$ оператора *B*, якщо

$$s(t)=\begin{cases} s_1(t) &= a_1t^5+b_1t^4+g_1t^3+d_1t^2+e_1t+f_1, & t\in[-5/2,-1/2],\\ s_2(t) &= a_2t^3+b_2t^2+g_2t+d_2, & t\in[-1/2,1/2],\\ s_3(t) &= a_3t^5+b_3t^4+g_3t^3+d_3t^2+e_3t+f_3, & t\in[1/2,5/2],\end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} s_1'(-1/2)=s_2'(-1/2),\quad s_2'(1/2)=s_3'(1/2),\\ s_1''(-1/2)=s_2''(-1/2),\quad s_2''(1/2)=s_3''(1/2),\end{aligned} \quad (3)$$

$$s(-5/2+i)=c_{-3+i},\quad s(5/2-i)=c_{3-i},\forall i=0,1,2 \quad (4)$$

Нехай оператор проектування $T\in L(Z,\tilde{Z})$ задається правилом

$$Tx(t)=\{x(t_i)\}_{i=1}^6.$$

Формула (1) у відповідності до означення (1) може бути переписаною у вигляді

$$\|Bf(t)\|^2=\inf_{s(t)\in\Omega}\|Bs(t)\|^2=\inf_{s(t)\in\Omega}\int_{-1/2}^{1/2}[s'']^2dt,$$

де $\Omega=\{s\in D(B):Ts=\{x(t_i)\}_{i=1}^6\}$. Отже, задача побудови (T,B)-сплайну складається у пошуку на множині Ω функції $s\in Z$, яка реалізує мінімум наступного функціонала

$$I(s)=\int_{-1/2}^{1/2}[s''(t)]^2dt. \quad (5)$$

Оскільки кривина кривої пропорційна другій похідній функції, що описує цю криву, то (T,B)-сплайн $s(t)$, який є розв'язком сформульованої задачі умовної мінімізації є функцією мінімальної на $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ локальної кривини.

Метод розв'язування та аналіз отриманих результатів. Перевіримо умови розв'язності даної задачі, використовуючи наведені вище умови 1) –5) задачі про (T,B)-інтерполяційний сплайн. Областю значень оператора $B=\frac{d^2}{dt^2}$ є гільбертів простір $Y=L^2\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$, множина його нулів $N(B)$ є чотиривимірним підпростором многочленів, отже $\dim N(B)=4$. Разом з тим, апроксимуючий простір $\tilde{Z}$ є 6-вимірним евклідовим простором R^6. Це означає, що умови 1)-4) виконуються. Залишається перевірити умову 5), тобто показати, що $N(B)\cap N(T)=\{0\}$. Нехай *s* є довільною функцією з множини $N(B)\cap N(T)$. Тоді, з однієї сторони, *s* повинна бути поліномом степеня не вище третього, а з іншої, приймати нульові значення на системі точок $\{x(t_i)\}_{i=1}^6$. Ясно, що це можливо лише за єдиної умови $s(t)\equiv 0$. Таким чином, у відповідності до наведених вище результатів задача умовної мінімізації

$$\int_{-1/2}^{1/2} [s''(t)]^2 dt \to \inf_{s\in\Omega} \tag{6}$$

має єдиний розв'язок $s(t) \in H^2\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Функцію $s(t) \in H^2\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ будемо називати шеститочковим (T, B)-сплайном, побудованим на ланцюгу вхідних даних $\{c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c_1, c_2, c_3\}$. Ця функція має мінімальну локальну кривину на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ і відтворює функцію зображення на цьому відрізку за її значеннями у шести точках фрагмента лінії рівня. Очевидно, що мінімізація функціонала (6) приводить до такої функції $s(t)$, де $s_2(t)$ (див. формулу (2)) є лінійною. Тобто на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ отримаємо пряму лінію. Але такий результат не є задовільним, оскільки лінійна інтерполяція сприяє появі «сходинкового» ефекту в результуючому зображенні. Тому пропонується модифікувати функціонал (6) та розв'язувати ту ж саму задачу умовної мінімізації з функціоналом

$$\int_{-1}^{1} [s''(t)]^2 dt \to \inf_{s\in\Omega}. \tag{7}$$

Таким чином, щоб визначити аналітичне подання функції $s(t)$, необхідно знайти невідомі коефіцієнти $a_1,..., f_1, a_2,..., d_2, a_3,..., f_3$ у формулах (2) за умови (3)-(4) та за умови мінімуму функціонала (7).

Для визначення шістнадцяти невідомих коефіцієнтів маємо дванадцять рівнянь, які отримуємо із умов (2)-(4). Ця система рівнянь є лінійною і має безліч розв'язків. Отже, можемо знайти загальний її розв'язок, обравши вільними чотири невідомі. Тоді отримаємо вирази для дванадцяти коефіцієнтів через чотири вільні. Далі необхідно визначити той набір коефіцієнтів, на якому функція (2) реалізує мінімум функціоналу (7). Підставимо до функціонала (7) функцію $s(t)$, яка визначається формулою (2). Після відповідних перетворень отримаємо вираз, до якого входять десять із шістнадцяти невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} I = {} & \frac{3175}{56}(a_1^2 + a_3^2) + \frac{279}{10}(b_1^2 + b_3^2) + \frac{21}{2}(g_1^2 + g_3^2) + 2(d_1^2 + d_3^2) + \\ & + \frac{315}{4}(a_3 b_3 - a_1 b_1) + \frac{93}{2}(a_1 g_1 + a_3 g_3) + \frac{75}{4}(a_3 d_3 - a_1 d_1) + \\ & + \frac{135}{4}(b_3 g_3 - b_1 g_1) + 14(b_1 d_1 + b_3 d_3) + 9(d_3 g_3 - d_1 g_1) + \\ & + 3a_2^2 + 4b_2^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Цей вираз будемо розглядати як функцію десяти змінних. Після підстановки коефіцієнтів, знайдених за результатом розв'язання системи рівнянь, і відповідних перетворень отримаємо із (8) функцію чотирьох змінних. Далі розв'язуємо задачу пошуку мінімуму функції чотирьох змінних. Для цього прирівнюємо до нуля частинні похідні цієї функції за кожною із змінних, дістаємо систему з чотирьох рівнянь, розв'язуючи яку отримаємо останні чотири коефіцієнти.

Описана процедура здійснена у системі Maple, в результаті був отриманий вигляд (T, B)-сплайну (2) на відрізку $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Так, на центральній частині $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ цей сплайн має наступне подання

$$\begin{aligned} s(t) = {} & \left[\frac{127}{45118}t^3 - \frac{245}{93172}t^2 - \frac{127}{180472}t + \frac{245}{372688}\right]c_{-3} + \\ & + \left[-\frac{4490}{22559}t^3 + \frac{4459}{23293}t^2 + \frac{2245}{45118}t - \frac{4459}{93172}\right]c_{-2} + \\ & + \left[\frac{26305}{45118}t^3 - \frac{17591}{93172}t^2 - \frac{206777}{180472}t + \frac{203935}{372688}\right]c_{-1} + \\ & + \left[-\frac{26305}{45118}t^3 - \frac{17591}{93172}t^2 + \frac{206777}{180472}t + \frac{203935}{372688}\right]c_1 + \\ & + \left[\frac{4490}{22559}t^3 + \frac{4459}{23293}t^2 - \frac{2245}{45118}t - \frac{4459}{93172}\right]c_2 + \\ & + \left[-\frac{127}{45118}t^3 - \frac{245}{93172}t^2 + \frac{127}{180472}t + \frac{245}{372688}\right]c_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Для отриманого сплайну був проведений порівняльний аналіз із кубічним сплайном мінімального дефекту [2] та сплайном, запропонованим в [1]. На малюнку 1 наведені три приклади наборів значень функції у шести точках, за якими здійснювалась інтерполяція, та відповідні результати інтерполяції на відрізку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ за

допомогою кубічного сплайну (пунктирна лінія), сплайну, запропонованого в [1] (тонка безперервна лінія), сплайну (8) (товста лінія). Характерним для обраних прикладів є те, що інтерполяція за аналогічними множинами значень функції приводить до появи так званих «хибних» екстремумів. А це, у свою чергу, стає причиною «розмиття» результуючого зображення, недостатньої його чіткості. Як видно із рисунків, використання саме сплайну (8) дозволяє отримати найбільш прийнятний результат.

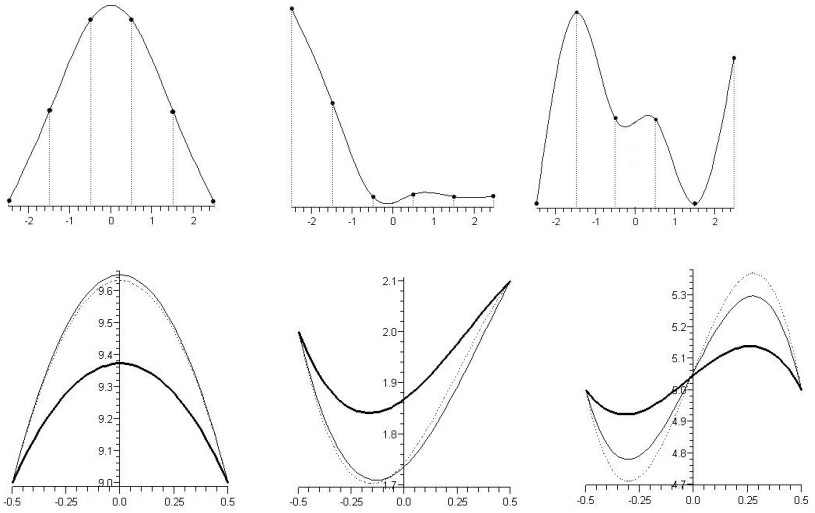


Рис.1. Результати інтерполяції на середній частині відрізку за обраними наборами значень функції у шести точках

Висновки. Запропонована процедура будування шеститочкового (T, B)-сплайну дозволила отримати подання сплайну, який на центральній частині відрізку інтерполяції має кращі характеристики кривини, ніж кубічний сплайн мінімального дефекту або сплайн, наведений в [1]. Це робить доречним залучення його для відновлення функції зображення в задачах просторової інтерполяції зображень, оскільки це сприяє збереженню гладкої неперервності контурів та чіткості зображення, що у свою чергу дозволяє зберегти якість інтерпольованих зображень.

Бібліографічні посилання

1. **Когут П.І.** Задачі каркасної інтерполяції статичних зображень / П. І. Когут, М. Є. Сердюк // Вестник Херсонского национального технического универ-ситета. – 2007. – № 2(28). – С.153–157.
2. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М., 1984. – 452 с.
3. **Треногин В.А.** Функциональный анализ / В.А.Треногин. – М., 2002. – 496 с.

Надійшла до редколегії 03.11.09