УДК 519.1

Л. М. Колєчкіна, О.А. Родіонова
ВНЗ Укоопспілки «Полтавський університет економіки і торгівлі»

ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ НА КОМБІНАТОРНИХ КОНФІГУРАЦІЯХ

Розглядається екстремальна задача на комбінаторній конфігурації розміщень. Описується метод локалізації значення цільової функції на основі теорії графів з урахуванням структури множини розміщень. Розглянуто приклад реалізації методу та описані параметри числових експериментів.

Рассматривается экстремальная задача на комбинаторной конфигурации размещений. Описывается метод локализации значения целевой функции на основании теории графов с учетом структуры множества размещений. Рассмотрено пример реализации метода и описаны параметры числовых экспериментов.

An extreme task is examined on combinatorial configuration of permutation. The method of objective function's value localization is described on the basis of the graphs theory taking into account the structure combinatorial set. The example of method's realization is considered and the numerical experiments' parameters are described.

Ключові слова: комбінаторна конфігурація, екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях, граф многогранника розміщень, метод локалізації значення функції.

Вступ. Екстремальні задачі є досить поширеними в останній час, що зумовлюється можливістю їх використання для моделювання прикладних задач та проблем. Цільова функція визначається на певній комбінаторній конфігурації, властивості якої відповідають умовам поставленої задачі. Оскільки спектр застосування моделей комбінаторної оптимізації зростає, то й самі задачі ускладнюються, адже не всі задачі на комбінаторних конфігураціях є достатньо вивченими та дослідженими. Дана ситуація підштовхує до пошуку нових методів та модифікації вже існуючих з метою оптимізації процесу обробки даних. Одним зі шляхів розвитку методів розв'язування екстремальних задач є застосування теорії графів.

© *Л. М. Колєчкіна, О.А. Родіонова, 2011*

Багато типів комбінаторних задач за допомогою теорії графів дуже добре описуються. Однак перевагою є не лише наочність графічного представлення, а й можливість одержання нових підходів до розв'язування. Слід зауважити, що проблеми оцінки числа ітерацій та ефективності алгоритмів симплексного типу в задачах лінійного програмування мають тісний зв'язок з метричними характеристиками графів.

Дана стаття є продовженням досліджень [1–3] і дає можливість розв'язати складнішу задачу локалізації значень лінійної функції, що полягає в знаходженні множини елементів конфігурації, при яких це значення досягається. Слід зазначити, що дана задача є під задачею для загальної екстремальної задачі при умові багатокритеріальності та додаткових обмеженнях.

Постановка задачі. Введемо поняття комбінаторної конфігурації з метою подальшого викладу матеріалу. Дамо визначення поняттю конфігурація. Нехай задані множини $X = \{1,2,...,m\}$, $Y = \{y_1, y_2,..., y_n\}$, і нехай на Y заданий строгий лінійний порядок: $Y = y_1 < y_2 < ... < y_n$. Відображення $\varphi: X \to Y$, що задовольняє деякий комплекс обмежень Λ, будемо називати конфігурацією. Комплекс обмежень Λ, що задовольняє відображення φ, визначає деякий клас конфігурації, який відповідає умовам комбінаторних конструкцій в задачі [3].

Екстремальна комбінаторна задача в загальному вигляді формулюється наступним чином: маємо множину з n елементів, на ній задається комбінаторна конфігурація $A = \{\sigma_i\} = \{a_1, a_2,..., a_k\}$. На множині A задається функція $f(x)$. Необхідно знайти екстремум функції $f(x)$ та елементи множини A, в яких цей екстремум досягається. Розглянемо загальну схему алгоритму розв'язування задачі локалізації значення функції на довільній комбінаторній конфігурації.

Суть алгоритму полягає у поступовому заглибленні до структури графа, розбитого на підграфи, причому відкидаються ті підграфи, які не можуть містити розв'язку. Такий підхід значно скорочує кількість варіантів перебору та оптимізує процес розв'язування задачі.

Алгоритм локалізації значення лінійної функції на комбінаторній конфігурації розміщень

Крок 1. Визначаємо кількість вершин графа комбінаторної конфігурації [1]. Для розміщень – $\frac{k!}{(k-n)!}$.

Крок 2. Визначаємо кількість крайніх точок у загальному графі кожного з підграфів.

Крок 3. Обчислюємо максимальне та мінімальне значення заданої цільової функції в крайніх точках підграфів загального графа:

$f(x)_{\max} = c_1 x_{k-n+1} + c_2 x_{k-n+2} + ... + c_{n-1} x_{k-1} + c_n x_k$;

$f(x)_{\min} = c_n x_1 + c_{n-1} x_2 + ... + c_2 x_{n-k-1} + c_1 x_{n-k}$

Крок 4. Будуємо структурний граф, що відображає лише крайні вершини підграфа.

Крок 5. Визначаємо значення цільової функції в початковій та кінцевій вершинах підграфів.

Крок 6. Визначаємо множину структурних підграфів, для яких задане значення цільової функції може міститись між його крайніми точками.

Крок 7. Формуємо множину точок-елементів конфігурації, для яких $f(x^*) = y$ [1-3]. Якщо всі точки знайдено (тобто серед множини підграфів немає таких, для яких би виконувалась умова кроку 6), то задача розв'язана. Виводимо елементи конфігурації. Інакше – переходимо на крок 8.

Крок 8. У підграфі, визначеному на кроці 6, фіксуємо останню координату в точці – вершині підграфа. Здійснюємо перехід на крок 1.

Описаний вище алгоритм реалізовано програмно для конфігурації розміщень. Розглянемо числовий приклад його роботи.

Приклад 1.

Розглянемо наступну комбінаторну задачу.

Дано: а) функція $f(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$, де $k = 5$, тоді $f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 4x_5$;

б) визначене значення функції $f(x^*) = 109$;

в) елементи множини розміщень (1 2 3 4 5 6 7).

Знайти: точки – елементи конфігурації розміщень, в яких досягається задане значення цільової функції.

Розв'язання: для впорядкування елементів цільової функції визначимо відображення π: $c = (2,5,3,6,4)$, $\varepsilon_{i^0} = (2,3,4,5,6)$, $\varepsilon_{i^0} = c_{\pi^{-1}}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \ \pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Будуємо граф, який містить $\frac{7!}{(7-5)!} = 2520$ вершин. Визначимо мінімальне та максимальне значення цільової функції:

$$\max := 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 110,$$

$$\min := 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 50.$$

Згідно алгоритму, визначимо крайні точки підграфів та знайдемо значення цільової функції в них.

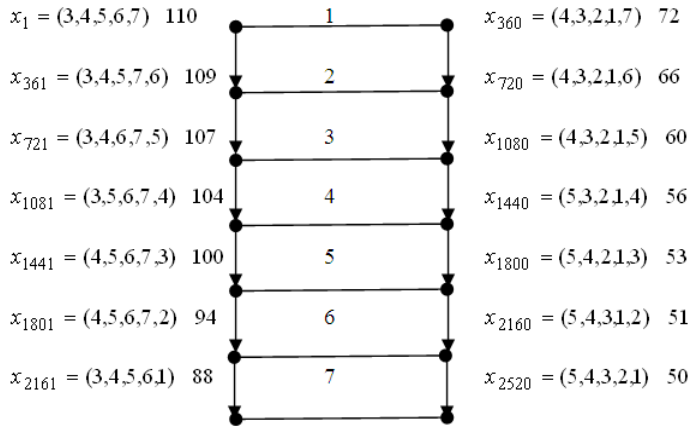


Рис. 1. Структурний граф многогранника розміщень

Відкидаємо п’ять нижніх рівнів підграфа, оскільки в них не може бути досягнуто встановлене значення цільової функції, що рівне 109. Розглянемо наступний підграф, зафіксувавши останню координату $x_5 = 6$, що належить усім вершинам підграфа (таблиця 1).

Таблиця 1

Значення функції у крайніх точках підграфів II рівня

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x)$
3	4	5	7	**109**	3	2	1	7	**87**
3	4	7	5	107	3	2	1	5	77
3	5	7	4	105	3	2	1	4	72
4	5	7	3	102	4	2	1	3	69
4	5	7	2	97	4	3	1	2	67
4	5	7	1	92	4	3	2	1	66

Тепер зафіксуємо значення наступної координати $x_4 = 7$ та проведемо обчислення для підграфа наступного рівня, де знаходяться вершини (таблиця 2).

Таблиця 2

Значення функції у крайніх точках підграфів III рівня

x_1	x_2	x_3	$f(x)$	x_1	x_2	x_3	$f(x)$
3	4	5	**109**	2	1	5	**98**
3	5	4	108	2	1	4	94
4	5	3	106	2	1	3	90
4	5	2	102	3	1	2	88
4	5	1	98	3	2	1	87

Зафіксуємо значення $x_3 = 5$ та проведемо відповідні розрахунки. Аналогічно визначимо значення координат на наступних рівнях, одержимо $x_2 = 4$.

Таким чином, з урахуванням відображення функції, одержуємо $x^* = (3,7,4,6,5)$, для якої $f(x^*) = 109$.

Провівши аналогічні розрахунки для першого підграфа (рис. 1), одержимо наступні точки, що будуть розв'язками задачі.

Таблиця 3

Координати вершин, що є розв'язками задачі

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$f(x)$
3	7	4	6	5	109
4	6	3	7	5	109
3	6	5	7	4	109
3	5	4	7	6	109

Отже, одержано чотири точки, що задовольняють умову задачі, значно скоротивши кількість варіантів перебору.

Таблиця 4

Результати числових експериментів

№	Розмірність функції n	Кількість елементів множини k	Кількість підграфів	Кількість точок	Час	Значення функції	Кількість розвязків
1	5	7	34	117	0,66	107	9
2	5	7	5	18	0,0001	110	1
3	5	7	15	54	0,22	51	4
4	5	7	57	181	1,15	105	16
5	5	6	120	274	2,19	79	26
6	5	6	166	366	2,02	74	20
7	5	6	194	413	3,57	69	34
8	5	6	33	83	0,55	53	8
9	4	6	64	178	1,26	53	17
10	4	6	10	31	0,1	67	3
11	4	6	29	87	0,49	62	6
12	4	6	54	154	1,05	57	12
13	4	7	32	124	0,66	76	7

Продовження таблиці 4

№	Розмірність функції n	Кількість елементів множини k	Кількість підграфів	Кількість точок	Час	Значення функції	Кількість розвязків

14	4	7	85	317	1,98	66	19
15	4	7	108	399	2,59	61	32
16	4	7	32	124	0,66	36	7
17	3	6	6	20	0,0001	46	2
18	3	6	14	48	0,22	40	5
19	3	7	28	123	0,66	35	11
20	3	7	15	65	0,27	45	5
21	3	7	25	103	0,55	41	10
22	3	7	9	39	0,11	19	3

Вище вказаний алгоритм програмно реалізований та проведені числові експерименти. Зазначимо, що розрахунки показали ефективність даного алгоритму для розглядуваного класу задач. Числові експерименти об'єднаємо і представимо у таблиці 4.

Аналізуючи дані таблиці 4, можна побудувати наступну графічну залежність часу роботи програми від кількості розв'язків задачі (рис. 2).

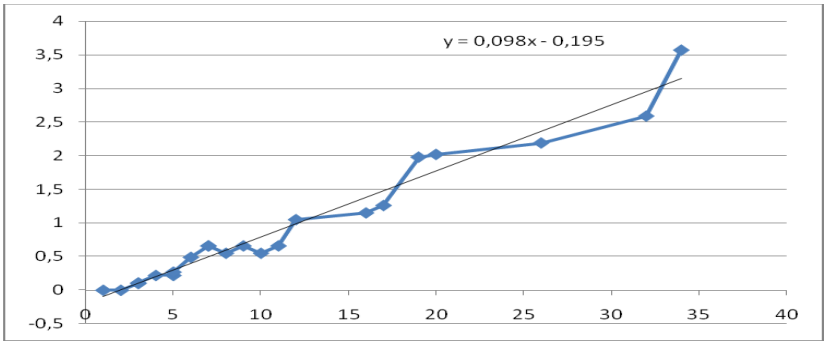


Рис. 2. Графік залежності часу роботи програми від кількості розв'язків

Висновки. Сформульована задача є актуальною у світлі теоретичних та прикладних досліджень та використовується як допоміжний алгоритм у

загальному методі розв'язування екстремальних задач при умові багатокритеріальності. Застосування алгоритму локалізації значення функції на комбінаторних конфігураціях дає можливість знайти шлях розв'язування поставленої задачі. Подальші дослідження плануються у сфері розробки загального алгоритму на різних комбінаторних конфігураціях.

Бібліографічні посилання

1. **Донец Г. А.** Локализация значения линейной функции заданной на перестановках / Г. А. Донец, Л. Н. Колечкина // Радиоэлектроника и информатика. – 2009. − № 1. – С. 76-81.

2. **Колечкина Л. Н.** Обоснование структурированного метода локализации значения линейной функции, заданной на комбинаторной конфигурации перестановок. / Л. Н. Колечкина // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27 – С. 67–80.

3. **Сачков В.Н.** Комбинаторные методы дискретной математики. / В.Н. Сачков – М., 1977. – 320 с.

Надійшла до редколегії 11.11.10