УДК 519.8

О.М. Кісельова, О.О. Жильцова
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН В ТЕРМІНАХ ФУНКЦІЙ МНОЖИН. ДВОЇСТА ЗАДАЧА

Наведено загальну постановку задачі мінімізації функції розбиття множини за умови обмежень у вигляді нерівностей. На базі отриманих раніше необхідних умов оптимальності, сформульовано та доведено достатні умови оптимальності. Також проведено аналіз аналога класичного функціоналу Лагранжа для поставленої задачі, доведено теореми двоїстості, описана двоїста задача.

Приведена общая постановка задачи минимизации функции разбиения множества при ограничениях в виде неравенства. На базе ранее полученных необходимых условий оптимальности, сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности. Также проведен анализ аналога классического функционала Лагранжа для поставленной задачи, доказаны теоремы двойственности, описана двойственная задача.

In the article, the general statement of the problem of set partitioning function minimization with the restrictions in the form of inequalities is presented. For this problem, on the base of the previously obtained necessary optimality conditions, the sufficient optimality conditions are formulated and proved. Also, the analysis of the analogue of the classical Lagrange functional is performed for the stated problem; the duality theorems are proved; the dual problem is described.

Ключові слова: оптимізація, розбиття множини, функція множин, необхідні умови оптимальності, достатні умови оптимальності, теорія двоїстості, функціонал Лагранжа.

Загальні відомості. Постановка задачі. Нехай Ω – неперервна, обмежена, вимірна за Лебегом множина з n-вимірного евклідового простору R^n.

Розбиттям множини $\Omega \subset \mathbf{R^n}$ на N підмножин назвемо систему її підмножин $\Omega_1, \dots, \Omega_N$, для яких виконуються три умови:

1) $\Omega_i \subseteq \Omega, \forall i = 1, \dots, n;$

2) $\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega;$ (1)

3) $mes(\Omega_i \cap \Omega_k) = 0, \forall i \neq k; i, k = 1, \dots, n,$ (2)

де $mes(\cdot)$ – міра Лебега.

Позначимо через $\Re_\Omega^N$ клас (простір) усіх можливих розбиттів множини Ω на N підмножин. При цьому розбиття, що відрізняються лише на множини нульової міри, вважають рівними елементами $\Re_\Omega^N$.

В [1] було побудовано метричний простір на базі $\Re_\Omega^N \subset \Sigma^N$, де $\Sigma^N \equiv \Sigma \times \dots \times \Sigma$ – декартовий добуток N алгебр множини Ω, та вдалося встановити такі його властивості як обмеженість, щільність у собі, хаусдорфовість, замкненість.

Для цього простору було сформульовану наступну задачу [2].

Нехай функції $F, G_1, \dots, G_m: \Re_\Omega^N \to R$– псевдонеперервні функції множин.

Задача 1. Знайти мінімум функції множин F на

$U = \{(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Re_\Omega^N : G_i(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$, тобто

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \to \min$$

при умовах

$$G_i(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \leq 0, i = 1, \dots, m,$$
$$(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Re_\Omega^N.$$

Також було доведено [2] необхідну умову оптимальності для задачі 1.

Теорема 1 (Необхідна умова оптимальності для задачі 1). *Нехай (Ω, Σ, μ) – скінчений безатомний простір з мірою і $F, G_1, \dots, G_m: \Re_\Omega^N \to R$ – диференційовані функції множин на $(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \in \Re_\Omega^N$. Якщо $(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*)$ – локальний мінімум задачі 1, то існують числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ такі, що*

© *О.М. Кісельова, О.О. Жильцова, 2011*

$$\sum_{i=1}^{N}\langle\lambda_0^* DF^i_{\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^* DG^{ij}_{\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*},\chi_{\Omega_i}-\chi_{\Omega_i^*}\rangle\geq 0 \qquad (3)$$

для усіх $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N$,

$$\lambda_i^* G_i(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)=0,\ i=1,\dots,m, \qquad (4)$$

$$\lambda_0^*,\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*\geq 0, \qquad (5)$$

$$G_i(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\leq 0, i=1,\dots,m. \qquad (6)$$

λ_j^* *не всі дорівнюють нулю,* (7)

де $DG^{ij}_{\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*}$ *– частинна похідна функції множин* G_i *за і-м аргументом на* $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*), i=1,\dots,N, j=1,\dots,m.$

Будемо казати, що $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ задовольняє **умову регулярності**, якщо існує $(R_1,\dots,R_N)\in\Re_\Omega^N$, для якого

$$G_j(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)+\sum_{i=1}^{N}\langle DG^{ij}_{\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*},\chi_{R_i}-\chi_{\Omega_i^*}\rangle<0,\qquad j=1,\dots,m.$$

Наслідок 1. Нехай виконані всі умови теореми 1 і $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ задовольняє умову регулярності. Тоді існують $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$, які в сукупності з $\lambda_0^*=1$ задовольняють умови (3)–(7).

Достатні умови оптимальності для задачі 1. Для формулювання достатніх умов оптимальності введемо та дослідимо поняття опуклості функції N множин.

Наступне означення базується на дослідженнях щодо опуклої комбінації (суміші) множин, проведених у [3].

Нехай $F:\Sigma^N\to R$. Будемо казати, що F є **опуклою функцією множин**, якщо для будь-яких $\lambda\in[0;1],(R_1,\dots,R_N),(S_1,\dots,S_N)\in\Sigma^N$ і для будь-яких послідовностей множин $\{R_i^k\}\subset R_i\backslash S_i$ і $\{S_i^k\}\subset S_i\backslash R_i, k=1,2,\dots$, таких, що $\chi_{R_i^k}\overset{сл^*}{\to}\lambda\chi_{R_i\backslash S_i}$ і $\chi_{S_i^k}\overset{сл^*}{\to}\lambda\chi_{S_i\backslash R_i}, i=1,\dots,N$, виконується нерівність

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,F\left[R_1^k\cup S_1^k\cup(R_1\cap S_1),\dots,R_N^k\cup S_N^k\cup(R_N\cap S_N)\right]\leq$$
$$\leq\lambda F(R_1,\dots,R_N)+(1-\lambda)F(S_1,\dots,S_N) \qquad (8)$$

Позначення $\overset{сл^*}{\to}$ відповідає слабкій* збіжності елементів у $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$.

У роботі [3] доведено наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай* (Ω,Σ,μ) *– скінченний безатомний простір з мірою і функція множин* $F:\Sigma^N\to R$ *диференційована на* Σ^N. *Якщо* $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ *сепарабельно і* F *опукла, то для всіх* $(R_1,\dots,R_N),(S_1,\dots,S_N)\in\Sigma^N$

$$\sum_{i=1}^{N}\langle DF^i_{R_1,\dots,R_N},\chi_{S_i}-\chi_{R_i}\rangle\leq F(S_1,\dots,S_N)-F(R_1,\dots,R_N). \qquad (9)$$

Очевидним наслідком з цієї теореми є наступне твердження.

Наслідок. Нехай (Ω,Σ,μ) – скінченний безатомний простір з мірою і функція множин $F:\Sigma^N\to R$ диференційована на Σ^N. Якщо $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ сепарабельно і F опукла, то для всіх $(R_1,\dots,R_N),(S_1,\dots,S_N)\in\Re_\Omega^N$

$$\sum_{i=1}^{N}\langle DF^i_{R_1,\dots,R_N},\chi_{S_i}-\chi_{R_i}\rangle\leq F(S_1,\dots,S_N)-F(R_1,\dots,R_N). \qquad (10)$$

Доведемо наступну теорему.

Теорема 3 (Достатні умови оптимальності для задачі 1). *Нехай* (Ω,Σ,μ) *– скінченний безатомний простір з мірою і сепарабельним* $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$. *Припустимо, що функції множин* $F,G_1,\dots,G_m:\Sigma^N\to R$ *диференційовані на* $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\in\Re_\Omega^N$ *і опуклі. Якщо існують числа* $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$, *такі, що* $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ *і* $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$ *в сукупності з* $\lambda_0^*=1$ *задовольняють умови (3)–(7), то* $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ *є глобальним мінімумом для задачі 1.*

Доведення. Припустимо, що деякий елемент $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N$ задовольняє умову $G_i(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\leq 0, i=1,\dots,m$. Тоді з опуклості F і наслідку з теореми 2 маємо:

$$F(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\geq F(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)+\sum_{i=1}^{N}\langle DF^i_{\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*},\chi_{\Omega_i}-\chi_{\Omega_i^*}\rangle. \qquad (11)$$

Враховуючи нерівність (3) з $\lambda_0^* = 1$, отримаємо

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \geq F(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \lambda_j^* \langle DG^{ij}_{\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*}, \chi_{\Omega_i} - \chi_{\Omega_i^*} \rangle. \quad (12)$$

Далі, використовуючи в останній нерівності опуклість G_j і умову (4), отримаємо

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \geq F(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} \lambda_j^* G_j(\Omega_1, \dots, \Omega_N).$$

Остаточно, (5) і той факт, що $G_i(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \leq 0, i = 1, \dots, m$, дають нам

$$F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \geq F(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*),$$

що і потрібно було довести.

Теорема доведена.

Двоїста задача. Подані умови оптимальності можуть бути використані для знаходження розв'язку задачі 1, задля цього вони навіть були конкретизовані [2]. Однак залишається питання про знаходження чисел $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$. Аналогічно загальній теорії розв'язання екстремальних задач для класичних функцій та функціоналів [4], побудуємо та проведемо дослідження двоїстої задачі для задачі 1.

Побудуємо фунціонал, аналогічний функціоналу Лагранжа, для задачі 1:

$$L\left((\Omega_1, \dots, \Omega_N), (\lambda_1, \dots, \lambda_m)\right) = F(\Omega_1, \dots, \Omega_N) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \quad (13)$$

Сідловою точкою функціонала (13) назвемо точку

$$(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*), (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \Re_\Omega^N \times \Lambda_0,$$

де $\Lambda_0 = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m): \lambda_1 \geq 0, \dots \lambda_m \geq 0\}$, якщо виконується:

$$L\left((\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*), (\lambda_1, \dots, \lambda_m)\right) \leq L\left((\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*), (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)\right) \leq L\left((\Omega_1, \dots, \Omega_N), (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)\right) \quad (14)$$

для будь-яких $(\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Re_\Omega^N$ та $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \Lambda_0$.

Лема 1. Для того, щоб точка $(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*), (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \Re_\Omega^N \times \Lambda_0$ була сідловою точкою функціонала (13), необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови:

$$L\left((\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*), (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)\right) \leq L\left((\Omega_1, \dots, \Omega_N), (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)\right), \forall (\Omega_1, \dots, \Omega_N) \in \Re_\Omega^N, \quad (15)$$

$$\lambda_i^* G_i(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) = 0, \ i = 1, \dots, m, \quad (16)$$

$$G_i(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \leq 0, i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*), (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*) \in \Re_\Omega^N \times \Lambda_0$ - сідлова точка функціонала (13). Тоді (15) є правою частиною нерівності (14). Покажемо, що виконуються умови (16) та (17). Розглянемо ліву частину нерівності (14):

$$F(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \leq F(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* G_i(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*),$$

$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_0$.

Звідси

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i^* - \lambda_i) G_i(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \geq 0, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_0 \quad (18)$$

Покажемо, що виконується (17). Для цього візьмемо $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, де $\lambda_j = \lambda_j^* + 1$ при деякому j, $1 \leq j \leq m$, та $\lambda_i = \lambda_i^*$ для усіх $i \neq j$. Вочевидь, обрана точка належить Λ_0. З (18) отримаємо $(-1) G_j(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \geq 0$, тобто $G_j(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \leq 0$ для усіх $1 \leq j \leq m$.

Візьмемо точку $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ з координатами $\lambda_j = 0$ при деякому j, $1 \leq j \leq m$, та $\lambda_i = \lambda_i^*$ для усіх $i \neq j$. Вочевидь, обрана точка належить Λ_0. З (18) отримаємо $0 \leq \lambda_j^* G_j(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*)$. Але ж $\lambda_j^* \geq 0, G_j(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) \leq 0$ *при* $j = 1, \dots, m$, тому остання нерівність можлива лише при $\lambda_i^* G_i(\Omega_1^*, \dots, \Omega_N^*) = 0, \ i = 1, \dots, m$. Таким чином, продемонстроване виконання усіх співвідношень (15)-(17).

Достатність. Нехай для деякої точки $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$ виконуються співвідношення (15)-(17). Покажемо, що тоді ця точка є сідловою. З (15) випливає виконання правої частини нерівності (14). Покажемо виконання лівої частини (14).

З умов (16),(17) випливає, що

$$(\lambda_i^*-\lambda_i)G_i(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)=0 \tag{19}$$

для всіх тих i, для яких $G_i(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)=0$, а якщо $G_i(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)<0$ при деякому i, то з (16) отримаємо, що $\lambda_i^*=0$. Отже в останньому випадку $(\lambda_i^*-\lambda_i)G_i(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)=-\lambda_iG_i(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\geq 0$. Просумуємо ці нерівності із рівностями (19) та отримаємо

$$\sum_{i=1}^m(\lambda_i^*-\lambda_i)G_i(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\geq 0,\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0$$

Додамо до обох частин цієї нерівності $F(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ та отримаємо ліву частину нерівності (14). Доведено.

Лема 2. Нехай функції $F,G_1,\dots,G_m:\Sigma^N\to R$ диференційовані та опуклі функції. Тоді для того, щоб $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$ була сідловою точкою функціонала (13), необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови (3)-(7) для $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$ у сукупності із $\lambda_0=1$.

Доведення. Дійсно, за таких умов функціонал $L\left((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\right)=F(\Omega_1,\dots,\Omega_N)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^*G_i(\Omega_1,\dots,\Omega_N)$ є опуклим при даних $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$. Для нього можна сформулювати задачу безумовної мінімізації на базі задачі 1. Вочевидь, для неї буде виконуватися умова регулярності. Тоді необхідні та достатні умови леми є прямим наслідком теорем 1 та 3, застосованих для згаданої задачі безумовної оптимізації.

Отже, для того щоб виконувалась нерівність

$$L\left((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\right)\leq L\left((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\right),\forall(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N,$$

необхідно та достатньо виконання умов (3)-(7). Ця нерівність у поєднанні із умовами (4) та (6) є, в свою чергу, за лемою 1, необхідною та достатньою умовою того, що $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$ є сідловою точкою функціонала (13).

Теорема 4. *Нехай* $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$ *– сідлова точка функціонала (13). Тоді* $L\left((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\right)=F(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$, $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ *є розв'язком задачі 1.*

Доведення. З умов (17) випливає, що $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ належить до припустимої множини задачі 1. З умови (16) легко бачити, що $L\left((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\right)=F(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$. Тоді нерівність (15) набуває вигляду:

$$F(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\leq L(\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)=F(\Omega_1,\dots,\Omega_N)+\sum_{i=1}^m\lambda_i^*G_i(\Omega_1,\dots,\Omega_N),$$

$\forall(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N$.

Але якщо $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)$ належить припустимій множині, то

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i^*G_i(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\leq 0.$$

Отже

$$F(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\leq L(\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\leq F(\Omega_1,\dots,\Omega_N),$$

тобто $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ є розв'язком задачі 1.

Теорема 5. *Нехай функції* $F,G_1,\dots,G_m:\Sigma^N\to R$ *диференційовані та опуклі функції, та для точки* $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\in\Re_\Omega$ *у відповідній задачі 1 виконуються умови регулярності. Тоді, якщо* $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\in\Re_\Omega$ *– мінімум функції F у задачі 1, то існують невід'ємні числа* $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$ *такі, що* $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$ *є сідловою точкою функціонала (13).*

Доведення. З теореми 1 випливає, що існують невід'ємні числа $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$, для яких виконуються умови (3)-(7). У свою чергу, за лемою 2, виконання цих умов для пари $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$ означає, що вона є сідловою точкою функціонала (13). Доведено.

Введемо у розгляд функцію

$$\chi(\Omega_1,\dots,\Omega_N)=\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0}L\left((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\right),\ (\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N.$$

Позначимо $U=\{(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N:G_i(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\leq 0,i=1,\dots,m\}$ – припустима множина для задачі 1.

Фактично

$$\mathrm{X}(\Omega_1,\dots,\Omega_N)=\begin{cases}F(\Omega_1,\dots,\Omega_N),\forall(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in U,\\ \infty,\forall(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in \Re_\Omega^N\backslash U.\end{cases}$$

Це означає, що

$$\min_{\Re_\Omega^N}\mathrm{X}(\Omega_1,\dots,\Omega_N)=\min_U F(\Omega_1,\dots,\Omega_N).$$

Задачу 1, таким чином, можна переписати у рівносильному вигляді:

$$\mathrm{X}(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\to\min;\ \ (\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N. \tag{20}$$

Будемо вважати, що функція $F(\Omega_1,\dots,\Omega_N)$ є обмеженою знизу на припустимій множині та множина розв'язків задачі 1 не порожня. За цих умов множини розв'язків задачі 1 та задачі (20) співпадають.

Розглянемо також функцію

$$\Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\min_{(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N}L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big),\qquad(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0.$$

Та розглянемо задачу

$$\Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\to\max;\ \ (\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0. \tag{21}$$

Як заведено, назвемо задачу (21) **двоїстою задачею** для основної задачі 1, а змінні $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ - **двоїстими змінними.**

Позначимо

$$\max_{\Lambda_0}\Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\Psi^*,\qquad\Lambda^*=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0:\Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\Psi^*\}.$$

Для розглянутих величин виконуються нерівності:

$$\Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\le\Psi^*\le F_*\le\mathrm{X}(\Omega_1,\dots,\Omega_N),\ (\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N,(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0. \tag{22}$$

Дійсно,

$$\Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)=\min_{(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N}L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)\le L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)$$

при будь-яких $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N$ та $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0$. Тому

$$\Psi^*=\max_{\Lambda_0}\Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\le\max_{\Lambda_0}L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)=\mathrm{X}(\Omega_1,\dots,\Omega_N),$$
$$\forall(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N.$$

Переходячи до мінімуму по $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N$ в останній нерівності, отримаємо $\Psi^*\le F_*$, звідки випливають нерівності (22).

Теорема 6. *Для того, щоб задача 1 та задача (21) мали розв'язки, та $F_*=\Psi^*$, необхідно та достатньо, щоб функція $L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)$, $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N,(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0$, мала сідлову точку на $\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$. Множина сідлових точок цієї функції на $\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$співпадає із декартовим добутком множин розв'язків задач 1 та (21).*

Доведення. Необхідність. Нехай задача 1 та задача (21) мають розв'язки, та $F_*=\Psi^*$. Візьмемо довільну пару розв'язків $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)$ та $(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)$ та покажемо, що $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)$ - сідлова точка. Маємо

$$\Psi^*=\Psi(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)=\min_{(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N}L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big)\le L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big)$$
$$\le\max_{\Lambda_0}L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)=\mathrm{X}(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)=F_*.$$

За умовою $F_*=\Psi^*$, отже всі попередні нерівності стають рівностями:

$$L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big)=\min_{(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N}L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big)=\max_{\Lambda_0}L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)=F_*.$$

З цього випливає виконання нерівностей (14), тобто $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)$ − сідлова точка за означенням. Таким чином, ми продемонстрували, що декартовий добуток множин розв'язків задач 1 та (21) належать множині сідловин точок функціонала $L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)$ на $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N,(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0$.

Достатність. Нехай $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$ – сідлова точка функціонала $L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)$ на $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N,(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0$. Згідно з нерівностями (14) це означає, що

$$L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)\le L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0.$$

Крім того,

$$L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big) \le L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big),(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N.$$

Отже

$$L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big) = \min_{(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N} L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big) = \Psi(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*).$$

З останнього співвідношення та нерівностей (22) випливає

$$L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big) = \Psi(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*) \le \Psi^* \le F_* \le \chi(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*) = L\big((\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\big),$$

тобто, в останньому записі всі знаки «менш або дорівнює» можна замінити на знаки рівності. Отже тим самим встановлено, що множина сідловин точок функціонала $L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)$ на $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N,(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0$ належить декартовому добутку множин розв'язків задач 1 та (21).

Наслідок 1. Наступні чотири твердження є рівносильними:

1) $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*),(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Re_\Omega^N\times\Lambda_0$ - сідлова точка функціонала $L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big)$ на $(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N,(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0$;
2) Задача 1 та задача (21) мають розв'язки, та $F_* = \Psi^*$;
3) Існують точки $(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*)\in\Re_\Omega^N$ та $(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*)\in\Lambda_0$ такі, що
$$\chi(\Omega_1^*,\dots,\Omega_N^*) = \Psi(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*);$$
4) Справедливою є рівність
$$\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0}\min_{(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N} L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big) =$$
$$= \min_{(\Omega_1,\dots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N}\max_{(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0} L\big((\Omega_1,\dots,\Omega_N),(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\big).$$

Задача (21), переписана у вигляді

$$-\Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\to\min;\ \ (\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\Lambda_0,$$

є задачею опуклого програмування. Її розв'язок допоможе знайти розв'язок основної задачі згідно необхідних та достатніх умов оптимальності, встановлених в теоремах 1 та 3. Зауважимо, що ці умови були конкретизовані у попередніх дослідженнях [2].

Бібліографічні посилання:

1. **Киселева Е.М.** Некоторые свойства пространства разбиений непрерывного множества / Е. М. Киселева, А.А. Жильцова // Питання прикладної математики та математичного моделювання: Зб. наук. праць – 2008. – С. 84-91.
2. **Киселева Е.М.** Необходимые условия оптимальности для непрерывных задач разбиения множества в терминах теории функций множеств / Е.М. Киселева, А.А. Жильцова // Проблемы управления и информатики – 2008, №6. – С. 55-66.
3. **Кісельова О.М.** Елементи теорії функцій множин: Навч. посіб. / О.М. Кисельова, Л.Л. Гарт. – Дн-ск, 2006. – 176 с.
4. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. /Ф.П. Васильев – М., 1988.

Надійшла до редколегії 20.05.2011