УДК 519.8

Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко, О.В. Зайченко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕПЕРЕРВНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ІЗ КВАДРАТИЧНИМ ФУНКЦІОНАЛОМ

Представлено наближений алгоритм розв'язання динамічної задачі оптимального розбиття множин з функціоналом, квадратичним за фазовою змінною. Наведено результати обчислювальних експериментів та їх інтерпретація.

Представлен приближенный алгоритм решения динамической задачи оптимального разбиения множеств с функционалом, квадратичным по фазовой переменной. Приведены результаты вычислительных экспериментов и их интерпретация

The numerical algorithm for the solving of the continuous dynamic optimal set partitioning problem with a quadratic functional is presented. The results of computational experiments and their interpretation are considered.

Ключові слова: динамічна задача оптимального розбиття множин, квадратичний функціонал, наближений алгоритм.

Вступ. Робота є послідовним продовженням досліджень неперервних динамічних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) з нелінійними функціоналами. Тут представлено чисельний алгоритм розв'язання динамічної неперервної задачі оптимального розбиття множин, вперше розглянутої в [1]. У вказаній роботі запропоновано підхід до розв'язування таких задач, який базується на зведенні квадратичних задач розбиття до неперервних лінійних задач ОРМ, які є добре вивченими [2]. Саме на такому підході засновано алгоритм розв'язання неперервної нелінійної динамічної задачі ОРМ. Наведено аналіз обчислювальних експериментів з розв'язання різних варіантів задачі: без обмежень, з інтегральними обмеженнями на фазову змінну, з розміщенням центрів підмножин.

Постановка нелінійної динамічної задачі оптимального розбиття множини на її підмножини з розміщенням «центрів підмножин». Нехай Ω – обмежена, вимірювана за Лебегом множина з E^n, $P_N(\Omega)$ – клас всіляких розбиттів множини Ω на N підмножин:

© Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко, О.В. Зайченко, 2014

$$P_N(\Omega)=\left\{\bar{\omega}=(\Omega_1,...,\Omega_N):\ \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,\ mes\left(\Omega_i\cap\Omega_j\right)=0,\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,N}\right\},$$

де $mes(\cdot)$ означає міру Лебега. Нехай $u_i(x,t;\tau),\ i=\overline{1,N},$ – задані дійсні, обмежені, визначені на $\Omega\times[0,T]\times\Omega$, вимірювальні за x і t при довільних векторах параметрів $\tau_i=\left(\tau_i^1,...,\tau_i^K\right)\in\Xi_i,\ \Xi_i\subseteq R^K,\ i=\overline{1,N}$. В окремому випадку, коли $K=n,\ \Xi_i\equiv\Omega,\ i=\overline{1,N}$, згідно термінології теорії неперервних задач оптимального розбиття множин, вектори $\tau_i,\ i=\overline{1,N}$, називаються центрами підмножин, що складають розбиття множини Ω.

Введемо до розгляду клас функцій

$$U=\Big\{(u(\cdot,\cdot;\bar{\omega},\tau):u(x,t;\bar{\omega},\tau)=u_i(x,t;\tau_i),\ м.в.\ для\ x\in\Omega_i,\tau_i\in\Xi_i,\ i=\overline{1,N},$$
$$\bar{\omega}\in P_N(\Omega),t\in[0,T]\Big\}$$

і функціонал

$$F(\gamma)=\int_{\Omega}\int_{0}^{T}\left(\rho(x,t;u(x,t;\bar{\omega},\tau))-\hat{\rho}(x,t)\right)^2dtdx,\qquad(1)$$

де $\gamma=\left(\bar{\omega},\tau,u(\cdot,\cdot;\bar{\omega},\tau),\rho(\cdot,\cdot)\right)$, $T>0$ – заданий момент часу; $u(\cdot,\cdot;\bar{\omega},\tau)\in U$, $\bar{\omega}\in P_N(\Omega)$, $\tau\in\Xi$, $\Xi=\Xi_1\times\Xi_2\times...\times\Xi_N$, функція $\rho(x,\cdot)\in C^1[0,T]$ для кожного $x\in\Omega$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned}&\dot{\rho}(x,t)=\alpha\rho(x,t)+u(x,t;\bar{\omega},\tau),\quad t\in[0,T],\\&\rho(x,0)=\rho_0(x),\end{aligned}\qquad(2)$$

причому виконуються нерівності

$$\int_0^T\int_{\Omega_i}\rho(x,t)dxdt\le b_i;\ \ i=\overline{1,N},\qquad(3)$$

де $\alpha,b_1,...,b_N$ – задані, як правило, невід'ємні величини.

Потрібно знайти таке розбиття $\bar{\omega}^*=(\Omega_1^*,...,\Omega_N^*)\in P_N(\Omega)$, набір з N K-вимірних параметрів $\tau^*=(\tau_1^*,\ldots,\tau_N^*)\in\Xi$, відповідне керування $u^*(\cdot,\cdot)\in U$ та фазову траєкторію $\rho^*(x,t)$ (що задовольняє умови (2), (3)), за яких функціонал (1) набував би мінімального значення.

Оптимальним розв'язком задачі (1) – (3) називається допустима четвірка $\gamma^* = \left(\bar{\omega}^*, \tau^*, u^*(\cdot,\cdot), \rho^*(\cdot,\cdot)\right)$, що доставляє мінімальне значення функціоналу F.

Зауваження 1. Замість інтегральних обмежень (3) на фазову змінну у сформульованій задачі можуть бути введені обмеження на керуючу функцію у такому вигляді:

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} u_i(x,t;\tau_i)dxdt \le b_i; \quad i = \overline{1,N}. \qquad (3')$$

Тоді задачі мінімізації функціонала $F(\gamma)$ за умов (2) і (3′) можна надати таку економічну інтерпретацію. Нехай розглядається співіснування виробників подібних за ціною та якістю товарів, споживачами яких є певний прошарок суспільства з приблизно однаковим рівнем доходів, які живуть в однакових умовах та мають однакову шкалу побажань. Спільним інтересом для фірм-виробників товару є утримання попиту $\rho(x,t)$ на даний товар на певному рівні $\hat{\rho}(x,t)$, який можливо лише дещо збільшувати або зменшувати з часом, зберігаючи при цьому головну тенденцію коливання в області оптимального для виробників попиту, за умов урахування граничного рівня споживання даного товару та виробничих потужностей підприємства. Вважається, що динаміка попиту прямо пропорційно залежить від поточного попиту. Крім того, підвищення попиту на продукцію може здійснюватися за рахунок проведення суб'єктами виробництва певних дій, що пожвавлюють інтерес до продукції, наприклад, незначного скорочення вартості товару за рахунок модернізації виробництва, рекламних акцій тощо. Сила впливу таких дій i-го виробника описується функцією $u_i(x,t;\tau_i), i = \overline{1,N}$. Оскільки виробники співіснують, немає сенсу кожному з них «вкладати кошти» в кожного споживача. Потрібно лише розподілити споживачів на зони впливу виробників з урахуванням їх спільних інтересів. Інтегральні обмеження враховують можливості самих виробників.

Основні розрахункові формули. Обґрунтування методу розв'язання задачі наведено в роботі [1]. Далі наведемо лише основні розрахункові формули і опишемо наближений алгоритм розв'язання. Задача (1) – (3) формулюється у термінах характеристичних функцій $\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)$ підмножин $\Omega_1,...,\Omega_N$ множини Ω: знайти вектор-функцію $\lambda(\cdot) = \left(\lambda_1(\cdot),...,\lambda_N(\cdot)\right)$ і набір векторів $\tau \in \Xi$, що мінімізують функціонал

$$I(\lambda(\cdot),\tau)=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}\left(\rho(x,t;\lambda(x),\tau)-\hat{\rho}(x,t)\right)^2 dtdx\to\min\limits_{\substack{\lambda(\cdot)\in\Lambda\\ \tau\in\Xi}},\qquad(4)$$

де

$$\Lambda=\left\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)):\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1;\ \lambda_i(x)=0\vee 1,\ i=\overline{1,N}\ \textit{м. в. для}\ x\in\Omega\right\},$$

а функція $\rho(x,t;\lambda(x),\tau)$ задовольняє умови

$$\begin{aligned}&\dot{\rho}(x,t)=\alpha\rho(x,t)+\sum_{j=1}^{N}u_j(x,t;\tau_j)\lambda_j(x),\quad t\in[0,T],\\&\rho(x,0)=\rho_0(x),\quad x\in\Omega,\end{aligned}\qquad(5)$$

$$\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Omega}\rho(x,t)\lambda_i(x)dxdt\le b_i;\ \ i=\overline{1,N}.\qquad(6)$$

Розв'язок задачі Коші (5) для кожного $x\in\Omega$ записується в такому аналітичному вигляді:

$$\begin{aligned}&\rho(x,t;\lambda(x),\tau)=\rho_0(x)+\sum_{j=1}^{N}\left(\int\limits_{0}^{t}e^{\alpha(t-\theta)}u_j(x,\theta,\tau_j)d\theta\right)\lambda_j(x),\\&x\in\Omega,\ t\in[0,T].\end{aligned}\qquad(7)$$

Значення компонент характеристичних функцій підмножин, що складають оптимальне розбиття в задачі (4) – (6), обчислюються за формулою

$$\lambda_i^*(x)=\begin{cases}1, & \textit{якщо}\ B_i(x;\tau_i^*,\xi_i^*)=\min\limits_{k=1,N}B_k(x;\tau_k^*,\xi_k^*),\\ 0 & \textit{в усіх інших випадках},\ \ i=\overline{1,N},\end{cases}\qquad(8)$$

де

$$B_i(x;\tau_i^*,\xi_i^*)=\xi_i T\rho_0(x)+\int\limits_{0}^{T}\phi_i\left(x,t;\tau_i^*\right)\left(\phi_i\left(x,t;\tau_i^*\right)-2\bar{\rho}(x,t)+\xi_i\right)dt,$$

$$\phi_i(x,t;\tau_i)=\int\limits_{0}^{t}e^{\alpha(t-\theta)}u_i(x,\theta,\tau_i)d\theta,\ i=\overline{1,N},$$

а в якості $\tau_1^*,...,\tau_N^*;\ \xi_1^*,...,\xi_N^*$ обирається оптимальний розв'язок задачі

$$\chi(\xi) = \min_{\tau \in \Xi} \left(\int_{\Omega} \min_{j=1,N} B_j(x;\tau_j,\xi_j)dx - \sum_{j=1}^{N} \xi_j b_j \right) \to \max_{\xi \in \Gamma}. \qquad (9)$$

Зауваження 2. В роботі [1] наведені такі умови, за яких множина допустимих процесів задачі (1) – (3) гарантовано не є порожньою: константи $b_1,...,b_N$ мають задовольняти співвідношенню

$$\sum_{i=1}^{N} b_i > S = T\int_{\Omega} \rho_0(x)dx + \int_{\Omega}\int_0^T\int_0^t e^{\alpha(t-\theta)}\overline{u}(x,\theta)d\theta dtdx, \qquad (10)$$

де $\overline{u}(x,t) = \max\limits_{i=1,N} \max\limits_{\tau_i \in \Xi_i} u_i(x,t,\tau_i)\ \forall x \in \Omega, t \in [0,T]$. Зазначимо, що ця оцінка є грубою, тому що з порушення нерівності (10) не завжди випливає той факт, що в задачі (1) – (3) не існує жодного допустимого розбиття.

Для розв'язання задачі максимізації негладкої увігнутої функції (9) на множині $\xi \in \Gamma$ застосовується метод узагальненого градієнтного підйому з розтягуванням простору в напрямку різниці двох послідовних градієнтів – r-алгоритм Шора Н.З. При цьому від задачі (9) відбувається перехід до задачі безумовної максимізації за допомогою введення в цільову функцію негладкою штрафної функції множини Г:

$$\overline{\chi}(\tau,\xi) = \chi_1(\tau,\xi) - S\sum_{i=1}^{N} \max(0,(-\xi_i)) \to \max_{\xi \in E^N} \min_{\tau \in \Omega^N}, \qquad (11)$$

де S – достатньо велике додатне число (значно більше за максимальний з множників Лагранжа), а функція $\chi_1(\tau,\xi)$ визначається в такий спосіб:

$$\chi_1(\tau,\xi) = \int_{\Omega} \min_{j=1,N} B_j(x;\tau_j,\xi_j)dx - \sum_{j=1}^{N} \xi_j b_j .$$

Наближений алгоритм розв'язання задачі. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що множина Ω є паралелепіпедом Π, сторони якого паралельні осям декартової прямокутної системи координат.

1. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою та задаємо початкове наближення $(\xi,\tau) = (\xi^{(0)},\tau^{(0)})$. Нехай $\hat{\Pi}$ – множина вузлів просторової сітки.

2. Покриваємо відрізок [0,T] сіткою з кроком h_t, позначимо через $\hat{T} = \{t : t = lh_t, l = \overline{1,n_T}\}$ множину вузлів сітки за часовою змінною.

3. Для кожного вузла $x \in \hat{\Pi}$:

a. Обчислюємо $\lambda_i^{(0)}(x)$, $i=\overline{1,N}$ за формулою (8) при значеннях $\xi_i = \xi_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}$, $i=\overline{1,N}$.

b. Обчислюємо значення фазової змінної $\rho(x,t;\lambda(x),\tau)$ в кожному вузлі часової сітки $\hat{T}$ за формулою (7) при $\lambda_i = \lambda_i^{(0)}, \tau_i = \tau_i^{(0)}$, $i=\overline{1,N}$.

4. Обчислюємо компоненти $\left(g_{\bar{\chi}}^{\tau_1},...,g_{\bar{\chi}}^{\tau_N}; g_{\bar{\chi}}^{\xi_1},...,g_{\bar{\chi}}^{\xi_N}\right)$ узагальненого градієнта функції $\bar{\chi}(\tau,\xi)$ в точці $(\tau,\xi)=(\tau_1^{(0)},...,\tau_N^{(0)};\xi_1^{(0)},...,\xi_N^{(0)})$ при $\lambda(\cdot)=\lambda^{(0)}(\cdot)$, $\xi_i=\xi_i^{(0)}$, $\tau_i=\tau_i^{(0)}, i=\overline{1,N}$.

5. Обираємо початковий крок $h_0 > 0$ r-алгоритму і знаходимо

$$\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(0)} + h_0 g_{\bar{\chi}}^{\xi_i}(\xi^{(0)});$$
$$\tau_i^{(1)} = \mathrm{Pr}_{\Xi_i}\left[\tau_i^{(0)} - h_0 g_{\bar{\chi}}^{\tau_i}(\tau^{(0)},\psi^{(0)})\right],\ i=\overline{1,N},$$

де Pr_{Ξ_i} – оператор проектування на множину Ξ_i.

Здійснюємо перехід на другий крок.

Нехай в результаті обчислень після *k*, *k*=1,2,... кроків алгоритму отримані певні значення $\tau^{(k)}, \xi^{(k)}, \lambda^{(k-1)}(x)$.

(k+1)-й крок:

6. Для кожного вузла $x \in \hat{\Pi}$:

a. Обчислюємо $\lambda_i^{(k)}(x)$, $i=\overline{1,N}$ за формулою (8) при значеннях $\xi_i = \xi_i^{(k)}, \tau_i = \tau_i^{(k)}$, $i=\overline{1,N}$.

b. Обчислюємо значення фазової змінної $\rho(x,t;\lambda(x),\tau)$ в кожному вузлі часової сітки $\hat{T}$ за формулою (7) при $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}$, $\tau_i = \tau_i^{(k)}$, $i=\overline{1,N}$.

7. Обчислюємо компоненти $\left(g_{\bar{\chi}}^{\tau_1},...,g_{\bar{\chi}}^{\tau_N}; g_{\bar{\chi}}^{\xi_1},...,g_{\bar{\chi}}^{\xi_N}\right)$ узагальненого градієнта функції $\bar{\chi}(\tau,\xi)$ в точці $(\tau,\xi)=(\tau_1^{(k)},...,\tau_N^{(k)};\xi_1^{(k)},...,\xi_N^{(k)})$ при $\lambda(\cdot)=\lambda^{(k)}(\cdot)$, $\xi_i=\xi_i^{(k)}$, $\tau_i=\tau_i^{(k)}, i=\overline{1,N}$.

8. Здійснюємо *(k+1)*-й крок r-алгоритму для розв'язання задачі (11), коротка схема якого записується в такий спосіб:

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + h_k B_{k+1}^{\xi} \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}),$$
$$\tau^{(k+1)} = P_{\Xi}\left[\tau^{(k)} - h_k B_{k+1}^{\tau} \tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})\right],$$

де B_{k+1}^{ξ}, B_{k+1}^{τ} – оператори відображення перетвореного простору в основний простір E^N, перерахунок яких здійснюється за такими формулами: $B_0^{\xi} = I_N$, $B_0^{\tau} = I_N$ (I_N – одинична матриця),

$$B_{k+1}^{\xi} = B_k^{\xi} R_{\alpha}\left(\frac{r_k}{\|r_k\|}\right), r_k = g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}),$$

$$B_{k+1}^{\tau} = B_k^{\tau} R_{\alpha}\left(\frac{\bar{r}_k}{\|\bar{r}_k\|}\right), \bar{r}_k = g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k-1)}, \xi^{(k-1)}).$$

$R_{\alpha}(\zeta)$ – оператор розтягнення простору в напрямку ζ з коефіцієнтом розтягнення α, матрична форма цього оператора записується в такий спосіб:

$$R_{\alpha}(\zeta) = I_N + (\alpha - 1)\zeta\zeta^T;$$

$\tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\xi} = \left(B_{k+1}^{\xi}\right)^T g_{\bar{\chi}}^{\xi}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$, $\tilde{g}_{\bar{\chi}}^{\tau} = \left(B_{k+1}^{\tau}\right)^T g_{\bar{\chi}}^{\tau}(\tau^{(k)}, \xi^{(k)})$, h_k – кроковий множник, вибір якого здійснюється з умови оптимуму функції за знайденим напрямом.

9. Якщо умова

$$\left\|(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}) - (\tau^{(k+1)}, \xi^{(k+1)})\right\| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0, \tag{12}$$

не виконується, то *k:=k*+1 і здійснюємо перехід на крок 6, інакше – перехід на крок 10.

10. Покладаємо $\lambda^*(x) = \lambda^{(l)}(x)$ для кожної точки $x \in \hat{\Pi}$, $\xi^* = \xi^{(l)}$, $\tau^* = \tau^{(l)}$, де l – номер ітерації, на якій вектор $\left(\tau^{(k)}, \xi^{(k)}\right)$ задовольняє умову (12) закінчення ітераційного процесу. Обчислюємо оптимальне значення цільового функціонала $I_1(\lambda^*(\cdot), \tau^*)$ і, для контролю правильності результату, значення функції (11) при таких параметрах: $\xi = \xi^*$, $\lambda(\cdot) = \lambda^*(\cdot)$, $\tau = \tau^*$.

Алгоритм описаний.

Зауваження 3. Наведений алгоритм легко адаптувати для розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин підмножин, в яких відсутні обмеження типу (3). При цьому функція (9) не містить доданки з

двоїстими змінними і, отже, не виникає потреби у максимізації вказаної функції за змінними $\xi_i, i=\overline{1,N}$, здійснюється лише її мінімізація за параметрами τ_i.

Зауваження 4. Для розв'язання задачі мінімізації функції (11) за набором параметрів $\tau \in \Xi$ не обов'язково застосовувати метод проекції градієнта. До того ж, у випадку, коли $\tau_i \in \Omega,\ i=\overline{1,N}$, а множина Ω має складну форму або не є опуклою, проекцію точки на Ω знайти складно або неможливо. Тоді доцільно ввести штрафну функцію множини Ω:

$$P(\tau_i)=\begin{cases}0, \forall \tau_i \in \Omega,\\ \infty, \forall \tau_i \in R^n \setminus \Omega,\end{cases}$$

розширити нею цільову функцію (9) і розв'язувати таку задачу безумовної оптимізації:

$$\bar{\bar{\chi}}(\tau,\xi)=\chi_1(\tau,\xi)-S\sum_{i=1}^{N}\max(0,(-\xi_i))+\sum_{i=1}^{N}P(\tau_i)\to\max_{\xi\in R^N}\min_{\tau\in R_K^N}. \quad (13)$$

Аналіз результатів обчислювальних експериментів. Наведений алгоритм реалізований у вигляді програмного модуля, який включено у комплекс програм DOSPP, орієнтований на розв'язання різноманітних динамічних задач оптимального розбиття множин. Роботу запропонованого алгоритму перевірено на багатьох тестових прикладах. Крім того, представлений алгоритм було адаптовано на випадки:

- розв'язання динамічної задачі ОРМ з нелінійним функціоналом без інтегральних обмежень із заданими фіксованими параметрами τ_i, $i=\overline{1,N}$;
- розв'язання задачі розбиття за наявності інтегральних обмежень на фазову змінну і/або на керуючу функцію.

Аналіз результатів обчислювальних експериментів проведемо в напрямі виявлення впливу вихідних даних (кількості вузлів інтегрування за часовою та просторовими координатами, виду функції початкових умов $\rho_0(x)$ та функцій $u_i(x,t;\tau_i)$) на структуру оптимального розбиття, а також дослідження форми розбиття залежно від вигляду функцій $\xi(x,t)$ та $u_i(x,t;\tau_i), i=\overline{1,N}$.

Далі представлені результати розв'язання деяких тестових прикладів. Загальними даними для тестів № 1 – № 6 (табл. 1,2) є такі параметри задачі (1) – (3): $\Omega=[0,1]\times[0,1]$; $T=3$; $c_i(\tau_i,x,t)=\|x-\tau_i\|^2$, $\forall x\in\Omega$, де $\|\cdot\|$ – евклідова метрика, $\tau_i\in\Omega$, $i=\overline{1,N}$ – фіксовані. Для чисельного

розв'язання задач множина Ω покривалася сіткою з кроком $h_x = h_y = 0.005,$ крок за часовою змінною $h_t = 0.015.$ Інші параметри задачі для відповідних експериментів, а також отримані оптимальні розв'язки, наведені в табл. 1,2.

Для перевірки коректності розрахункових формул і роботи алгоритму в якості вихідних даних, тобто функцій $\rho_0(x)$, $\hat{\rho}(x,t)$ та $u_i(\mathrm{x},\mathrm{t};\tau_i), \mathrm{i} = \overline{1,N}$, обирались такі, щоб структуру оптимального розбиття й значення цільового функціонала можна було б передбачити заздалегідь.

У тесті № 1 функція $\hat{\rho}(x,t)$ є розв'язком задачі Коші (2) на випадок, коли керуюча функція $u_i(\mathrm{x},\mathrm{t};\tau_i)$ – кусково-постійна за просторовою змінною. Як видно з табл. 1, отримано оптимальне розбиття і майже ненульове значення цільового функціонала. Похибка обчислень обумовлюється дискретизацією множини Ω і наближеним обчисленням подвійного інтеграла за просторовою змінною у функціоналі. Так само виходить і у тесті № 2, хоча похибка обчислення функціонала задачі значно більша. Результати тесту № 3 демонструють можливість апроксимації функції $u_i(\mathrm{x},\mathrm{t};\tau_i)$ так, щоб відповідний їй розв'язок рівняння (2) був якомога ближчим до функції $\hat{\rho}(x,t)$, яку, в свою чергу, можна інтерпретувати як спільний вплив на множину Ω джерел, розташованих у точках $\sigma_\mathrm{m} \in \Omega, \mathrm{m} = \overline{1,\mathrm{M}}$. На рисунку в табл. 1 ці джерела позначені колами, до того ж, чим більшою є інтенсивність джерела $\mathrm{Q_m}$, тим більший радіус кола, що його зазначає. Зазначимо, що лівий верхній кут рисунків відповідає координатам (0,0), вісь $\mathrm{Ox_1}$ направлена донизу, вісь $\mathrm{Ox_2}$ – вправо.

У табл. 2 представлені результати експериментів з розв'язання динамічних задач ОРМ з інтегральними обмеженнями типу (3). У тестах № 4 – 5 функція, середньоквадратичне відхилення фазової змінної від якої мінімізується, має такий вигляд:

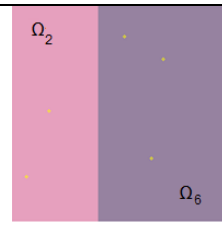
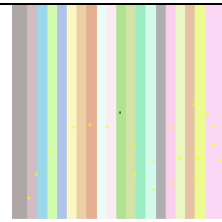
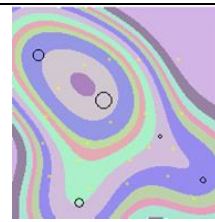
$$\hat{\rho}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \begin{cases} 5\mathrm{te}^{-10\left((\mathrm{x}_1-0.75)^2+(\mathrm{x}_2-0.25)^2\right)}, -2\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2 \geq 0.3 \\ 5\mathrm{te}^{-10\left((\mathrm{x}_1-0.3)^2+(\mathrm{x}_2-0.7)^2\right)}, -2\mathrm{x}_1^2 + \mathrm{x}_2 < 0.3 \end{cases}, \qquad (14)$$

а функції $u_i(\mathrm{x},\mathrm{t};\tau_i)$ відрізняються лише векторами τ_i.

У випадку, коли величини правих частин обмежень-нерівностей (3) досить великі – тест № 4, отримано таке оптимальне розбиття, що фазова змінна «майже» збігається з функцією $\hat{\rho}(x,t)$. При зменшенні величин $\mathrm{b_1}$

Таблиця 1.

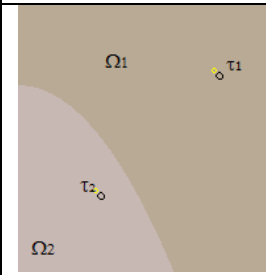
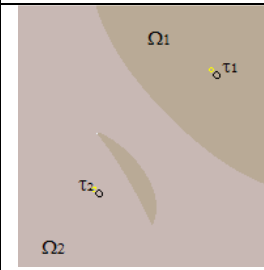
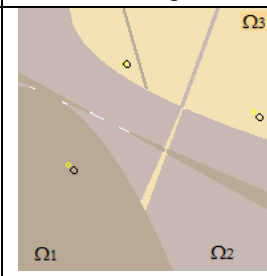
Результати розв'язання тестових динамічних задач ОРМ з квадратичним функціоналом за відсутності інтегральних обмежень на фазову змінну

№ тесту	N; Функції $\rho_0(x)$, $u_i(x,t;\tau_i)$, $\hat{\rho}(x,t)$	Оптимальне розбиття / Значення цільового функціонала
1	N=6; $\rho_0(x)=0$; $u_i(x,t;\tau_i)=a_i$, $a_1=0.14; a_2=0.2; a_3=0.3;$ $a_4=0.4; a_5=0.55; a_6=0.62;$ $\hat{\rho}(x,t)=\begin{cases}0.2t, & x_1\le 0.4\\ 0.62t, & x_1>0.4\end{cases}$	 I^* =**0.00012**
2	N=20; $\rho_0(x)=0$; $u_i(x,t;\tau_i)=i, \quad i=\overline{1,20}$, $\hat{\rho}(x,t)=\frac{20}{3}x_1 t$	 I^* =**4.4470**
3	N=20; $\rho_0(x)=3$; $u_i(x,t;\tau_i)=a_i$, $3.4\le a_i\le 9.4, \quad i=\overline{1,20}$, $\hat{\rho}(x,t)=2+e^{-0.8t}\sum_{m=1}^{M} Q_m e^{-\gamma_m\|x-\sigma_m\|^2}$ $M=5; Q=(8,5,4,7,3,2); \quad \sigma_m$ – див. рис.	 I^* =**22.1728**

чи b_2, зменшується підмножина, на якій задається відповідна функція $u_i(x,t;\tau_i)$, що відображено на рисунку з тесту № 5.

Таблиця 2.

Результати розв'язання тестових динамічних задач ОРМ з квадратичним функціоналом і інтегральними обмеженнями на фазову змінну

№ тесту	N; вектор b ; функції $\rho_0(x)$, $u_i(x,t;\tau_i)$, $\hat{\rho}(x,t)$	Оптимальне значення параметрів ξ	Оптимальне розбиття / Значення функціонала I_1 та функції χ
4	N=2; $b_i = 500$, $\rho_0(x) = 0$, $\hat{\rho}(x,t)$ – див. (14), $u_i = 5e^{-10\|x-\tau_i\|^2}$, $\tau_1 = (0.3, 0.7)$, $\tau_2 = (0.75, 0.25)$	(0.0004,0.0036)	 $\chi^* = 0.059$ $I_1^* = 0.0620$
5	N=2; $\rho_0(x) = 0$, $b_0 = 0.50$, $b_1 = 500$, $\hat{\rho}(x,t)$ – див. (14), $u_i = 5e^{-10\|x-\tau_i\|^2}$, $\tau_1 = (0.3, 0.7)$, $\tau_2 = (0.75, 0.25)$	(5.228,2.4E-08)	 $\chi^* = 2.913$ $I_1^* = 2.914$
6	N=3; $\rho_0(x) = 0$; $b_i = 500$, $\hat{\rho}(x,t)$ – див. (15), $u_i = 5e^{-10\|x-\tau_i\|^2}$, $\tau_1 = (0.2, 0.6)$, $\tau_2 = (0.4, 0.2)$, $\tau_3 = (0.9, 0.4)$.	$\xi_i \approx$1.0E-06	 $\chi^* = 0.412$ $I_1^* = 0.4199$

Цікавим з точки зору «стійкості» розбиття виявився результат тесту № 6, у якому функція $\hat{\rho}(x,t)$ має такий вигляд:

$$\hat{\rho}(x,t)=\begin{cases}5te^{-10\left((x_1-0.2)^2+(x_2-0.6)^2\right)}, -2x_1^2+x_2\geq 0.3,\\ 5te^{-10\left((x_1-0.4)^2+(x_2-0.2)^2\right)}, -3x_2^2+x_1<0.2,\\ 5te^{-10\left((x_1-0.9)^2+(x_2-0.4)^2\right)} \text{ для інших } (x_1,x_2),\end{cases}$$

Як можна помітити на рисунку у тесті 6, оптимальне розбиття має зони нестійкості, тобто у підмножинах, що складають розбиття, з'являються деякі вкраплення – множини (майже нульової міри) точок з інших підмножин. Неважко помітити, що зазначені множини є околами границь між клітинками діаграми Вороного, тобто ліній, що описуються рівняннями

$$\left\|x-\tau_i\right\|^2=\left\|x-\tau_j\right\|^2,\quad i\neq j.$$

Можна припустити, що така «нестійкість» оптимального розбиття пов'язана саме з видом функцій $\hat{\rho}(x,t)$ та $u_i(x,t;\tau_i)$ і з обчислювальною похибкою.

Висновки. Отже, в роботі описаний чисельний алгоритм розв’язання динамічної задачі ОРМ з функціоналом, нелінійним за фазовою координатою, в якій функція стану системи, змінюється так, що швидкість її зміни в кожній точці множини Ω залежить від приналежності цієї точки до певної підмножини Ω_i множини Ω. Алгоритм базується на зведенні вихідної нелінійної задачі оптимального розбиття множини до лінійної неперервної задачі ОРМ, яка, в свою чергу, редукується до скінченновимірної задачі максиміну певної негладкої функції. Проведений аналіз результатів розв’язання тестових задач.

Бібліографічні посилання

1. **Кісельова О.М.** Про зведення однієї нелінійної динамічної задачі оптимального розбиття множин до лінійної неперервної задачі розбиття / О.М. Кісельова, Л.С. Коряшкіна, О.В. Зайченко // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. пр. – Д., 2013. – С. 164–173.

2. **Киселева Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : моногр. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.

Надійшла до редколегії 17.02.2014