УДК 519.8

В.Н. Богомаз
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИКИ ВИБРОСИСТЕМЫ

Досліджується питання розв'язності задачі векторної оптимізації динаміки вібросистеми. Одержані достатні умови існування розв'язків.

Исследуется вопрос разрешимости задачи векторной оптимизации динамики вибросистемы. Получены достаточные условия существования решений.

The question of solvability of task to vector optimization of dynamics of the vibrosystem is in-process investigated. The sufficient terms of existence of decisions are got.

Ключевые слова: полунепрерывность снизу, эффективные решения, частично упорядоченные пространства, динамическая система.

Введение. В предыдущей работе автора [3] была рассмотрена задача оптимального управления вибросистемой, встроенной в уплотняющую машину каткового типа. Конструкция вибросистемы подробно была описана в работе [1]. Особенностями рассмотренной задачи оптимального управления являются:

- наличие ограничений на управления и фазовые координаты;
- система обыкновенных дифференциальных уравнений существенно нелинейна относительно фазовых координат и линейна относительно управлений;
- функционал качества линейно зависит от управлений.

Задача имеет следующий физический смысл: среди допустимых законов изменения моментов, приложенных к валам дебалансов и водила, найти такие, которые обеспечивают увеличение воздействия машины на уплотняемую среду втечение всего промежутка времени работы вибросистемы, сохраняя угловые скорости вращения дебалансов и водила в пределах допустимых. Другими словами, необходимо обеспечить отрицательность суммарной вертикальной возмущающей силы втечение всего промежутка времени работы вибросистемы.

Функционалом качества выбран интеграл от функции изменения суммарной возмущающей силы. Таким образом, минимизировалось среднее значение возмущающей силы на промежутке времени от 0 до 40 секунд.

Сглаженная функция изменения суммарной возмущающей силы для вибросистемы с двумя дебалансами, соответствующая оптимальному управлению в рассмотренной задаче приведена на рисунке 1.

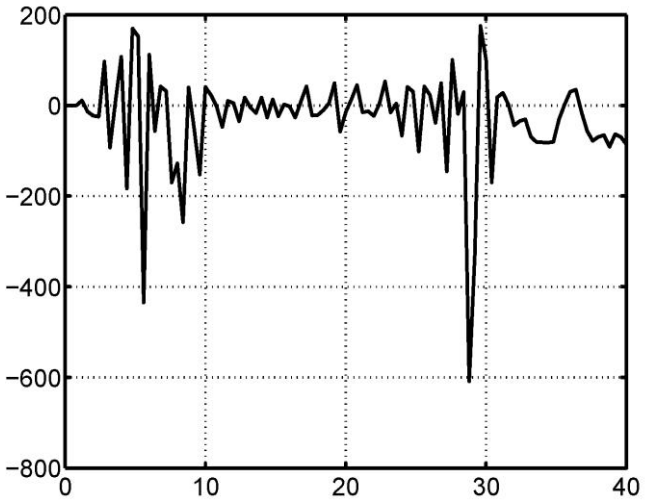


Рис. 1 Суммарная возмущающая сила $L\left(u\left(t\right),x\left(t\right)\right)$

Рассматривая кривую изменения суммарной возмущающей силы, приходим к выводу, что среднее ее значение отрицательно, но есть отрезки времени, где она строго положительна, что является нежелательным. Таким образом, рассматривать подобную задачу с точки зрения скалярной оптимизации является неэффективным.

Основной целью данной работы является постановка задачи векторной оптимизации динамики вибросистемы, а также приведение достаточных условий ее разрешимости.

© *В.Н. Богомаз, 2011*

Основные понятия и вспомогательные результаты. Приведем некоторые известные понятия, необходимые для дальнейших рассуждений.

Определение 1.1. Непустое множество Λ банахового пространства Y с нулевым элементом θ называется конусом, если выполняется условие $\alpha\Lambda \subseteq \Lambda,\ \forall \alpha \geq 0$. Если к тому же выполняется:

1) условие $\Lambda + \Lambda \subseteq \Lambda$, то конус $\Lambda \subseteq Y$ называется выпуклым;

2) условие $\Lambda \cap (-\Lambda) = \{\theta\}$, то конус $\Lambda \subseteq Y$ называется острым.

Конус $\Lambda \subseteq Y$ называется телесным, если его внутренность $Int\Lambda$ непуста.

Всюду далее будем считать, что пространство Y частично упорядочено выпуклым замкнутым острым конусом $\Lambda \subset Y$. Обозначим частичный порядок, порожденный конусом Λ как $\leq_\Lambda$, что означает следующее:

$$y_1 \leq_\Lambda y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \Lambda,\ y_1 <_\Lambda y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \Lambda \setminus \{\theta\}. \tag{1.1}$$

Пусть Y_0 – некоторое непустое подмножество пространства Y. Обозначим, через $Int_\tau Y_0$, $cl_\tau Y_0$, $\partial_\tau Y_0$ соответственно внутренность, замыкание и границу относительно топологии τ множества $Y_0 \subset Y$. Всюду далее, если τ ассоциируется с сильной топологией и это не приводит к непониманию, этот индекс будем опускать. Когда τ ассоциируется со слабой топологией, то в качестве индекса будем использовать букву w.

Приведем некоторые известные факты из теории векторной оптимизации.

Элемент $y^* \in Y_0$ будем называть Λ-минимальным, если выполняется условие $(y^* - \Lambda) \cap Y_0 = \{y^*\}$. Совокупность всех Λ-минимальных элементов множества $Y_0 \subset Y$ обозначим через $\Lambda - Min(Y_0)$.

Элемент $y^* \in Y$ будем называть Λ-минорантой множества $Y_0 \subset Y$, если выполняется условие $y^* \leq_\Lambda y$ для всех $y \in Y_0$. Множество Y_0, для которого множество его Λ-минорант непусто, будем называть Λ-ограниченным снизу.

Последовательность $\{y_n \in Y\}$ будем называть невозрастающей, если для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие $y_{n+1} \leq_\Lambda y_n$. Выпуклый конус Λ будем называть правильным, если каждая невозрастающая и Λ-ограниченная снизу последовательность $\{y_n \in Y\} \to y^*$ сильно в Y.

Определение 1.2. Множество $Y_0 \subset Y$ называется Λ-полуограниченным снизу, если любая невозрастающая последовательность $\{y_n\} \subset Y_0$ является Λ-ограниченной снизу.

Обозначим через $\overline{Y}$ расширенное пространство $Y \cup \{\pm\infty\}$, а через $Y^\bullet$ - полурасширенное пространство $Y \cup \{+\infty\}$. При этом допустим, что $\|\pm\infty\|_Y = \pm\infty$.

Приведем определение эффективного Λ_τ-инфимума множества $Y_0 \subset Y$.

Определение 1.3. Эффективным Λ_τ-инфимумом множества $Y_0 \subset Y$ будем называть множество Λ-минимальных элементов τ-замыкания множества Y_0 в пространстве Y в случае, когда это множество непусто, и множество $\{-\infty\}$ в противоположном случае, т.е.:

$$\Lambda_\tau - Inf(Y_0) = \begin{cases} \Lambda - Min(cl_\tau Y_0),\ Min(cl_\tau Y_0) \neq \varnothing, \\ \{-\infty\},\ Min(cl_\tau Y_0) = \varnothing. \end{cases} \tag{1.2}$$

Пусть X и Y – банаховы пространства, и Y частично упорядочено с помощью некоторого выпуклого замкнутого острого конуса Λ. Для любой последовательности $\{y_n\} \subset Y$ обозначим через $L^\tau\{y_n\}$ множество всех ее предельных точек относительно топологии τ. Будем считать, что:

1) $-\infty \in L^\tau\{y_n\}$, если последовательность $\{y_n\} \subset Y$ является убывающей и неограниченной снизу;

2) $+\infty \in L^\tau\{y_n\}$, если последовательность $\{y_n\} \subset Y$ является возрастающей и неограниченной сверху.

Пусть задано некоторое отображение $f: X \to Y^\bullet$. Множество, являющееся эффективным Λ_τ-инфимумом образа $f(X)$ в $Y^\bullet$, будем называть эффективным Λ_τ-инфимумом отображения f и обозначать $\underset{x \in X}{\Lambda_\tau - Inf}\ f(x)$.

Для произвольного отображения $f: X \to Y^\bullet$ введем для рассмотрения следующие множества:

$$L^{s,\tau}(f(x_0)) = \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in S_s(x_0)} L^\tau(f(x_k)), \tag{1.3}$$

$$L^{w,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)=\bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\in S_w(x_0)} L^{\tau}\left(f\left(x_k\right)\right), \tag{1.4}$$

где $S_s\left(x_0\right)$ и $S_w\left(x_0\right)$ – совокупность всех последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset X$ таких, что $x_k\to x_0$ сильно в X и слабо в X соответственно.

Для приведения понятия Λ_τ -нижней грани отображения введем следующие множества:

$$L_{\min}^{s,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)=L^{s,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)\cap\Lambda_\tau-\underset{x\in X}{Inf}\ f(x), \tag{1.5}$$

$$L_{\min}^{w,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)=L^{w,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)\cap\Lambda_\tau-\underset{x\in X}{Inf}\ f(x). \tag{1.6}$$

Определение 1.4. Λ_τ -нижней гранью отображения f в точке $x_0\in X$ будем называть множество:

$$\Lambda_\tau-\liminf_{x\to x_0} f\left(x\right)=\begin{cases}L_{\min}^{s,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right),\ L_{\min}^{s,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)\neq\varnothing,\\ \Lambda_\tau-Inf\ L^{s,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right),\ L_{\min}^{s,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)=\varnothing,\end{cases} \tag{1.7}$$

и слабой Λ_τ -нижней гранью отображения f в точке $x_0\in X$ – множество:

$$\Lambda_\tau-\liminf_{\substack{w\\ x\to x_0}} f\left(x\right)=\begin{cases}L_{\min}^{w,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right),\ L_{\min}^{w,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)\neq\varnothing,\\ \Lambda_\tau-Inf\ L^{w,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right),\ L_{\min}^{w,\tau}\left(f\left(x_0\right)\right)=\varnothing,\end{cases} \tag{1.8}$$

где $x\xrightarrow{w}x_0$ означает, что $x\to x_0$ слабо в X .

Пусть $Dom\, f=\left\{x^*\in X: f\left(x^*\right)\neq+\infty\right\}$ – эффективное множество отображения $f: X\to Y^\bullet$.

Определение 1.5. Отображение $f: X\to Y^\bullet$ будем называть Λ_τ -полунепрерывным снизу в точке $x_0\in Dom\, f$, если $f\left(x_0\right)\in\Lambda_\tau-\liminf_{x\to x_0} f\left(x\right)$ и слабо Λ_τ -полунепрерывным снизу в точке $x_0\in Dom\, f$, если $f\left(x_0\right)\in\Lambda_\tau-\liminf_{\substack{w\\ x\to x_0}} f\left(x\right)$.

Пусть X_∂ некоторое непустое подмножество пространства X .

Как известно, для задач векторной оптимизации основным понятием является понятие эффективного решения.

Определение 1.6. Элемент $x^*\in X_\partial$ назовем Λ -эффективным решением задачи векторной оптимизации, если $f\left(x^*\right)$ является Λ -минимальным элементом множества $f\left(X_\partial\right)$, т.е. выполняется условие:

$$\left(f\left(x^*\right)-\Lambda\right)\cap f\left(X_\partial\right)=\left\{f\left(x^*\right)\right\}.$$

Задачу векторной оптимизации, при которой необходимо найти множество всех Λ -эффективных решений, будем сокращенно записывать:

$$\begin{aligned}&f\left(x\right)\to\Lambda-Min,\\ &x\in X_\partial.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Множество всех Λ -эффективных решений задачи векторной оптимизации (1.9) обозначим через $Eff\left(X_\partial; f;\Lambda\right)$, т.е.:

$$Eff\left(X_\partial; f;\Lambda\right)=\left\{x^*\in X_\partial: f\left(x^*\right)\in\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Min}\ f\left(x\right)\right\}.$$

Определение 1.7. Элемент $x^*\in X_\partial$ назовем Λ_τ -эффективным решением задачи векторной оптимизации, если $f\left(x^*\right)$ является Λ -минимальным элементом множества $cl_\tau f\left(X_\partial\right)$. Множество всех Λ_τ -эффективных решений задачи векторной оптимизации обозначим через $Eff_\tau\left(X_\partial; f;\Lambda\right)$, т.е.:

$$Eff_\tau\left(X_\partial; f;\Lambda\right)=\left\{x^*\in X_\partial: f\left(x^*\right)\in\Lambda_\tau-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ f\left(x\right)\right\}.$$

Задачу векторной оптимизации, при которой необходимо найти множество всех Λ_τ -эффективных решений, будем сокращенно записывать:

$$\begin{aligned}&f\left(x\right)\to\Lambda_\tau-\inf,\\ &x\in X_\partial.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Приведем один известный результат из [5].

Теорема 1. *Пусть* X *и* Y *– банаховы пространства, пространство* Y *полуупорядочено некоторым конусом* Λ, *множество* $X_\partial \subset X$ *является* μ*-компактным, а отображение* $f: X_\partial \to Y^\bullet$ *является* Λ_τ*-полунепрерывным снизу относительно топологии* μ *пространства* X. *Тогда отображение* f *является* Λ*-полуограниченным снизу. Если к тому же, конус* Λ *– правильный и для любого* $x \in X_\partial$ *выполнено условие* $\{f(x)\} = \Lambda_\tau - \liminf\limits_{\substack{\mu \\ u \to x}} f(u)$, *то* $Eff_\tau(X_\partial; f; \Lambda) \neq \varnothing$.

Замечание 1. Внутренность конуса Λ может быть пустой.

Необходимо заметить, что для векторнозначных отображений существует несколько понятий полунепрерывности. Для формулировки следствий из теоремы 1, приведем некоторые из них.

Определение 1.8. Отображение $f: X_\partial \to Y^\bullet$ называют полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если для любой окрестности V точки $f(x_0)$ в Y существует окрестность точки x_0 в X такая, что выполняется условие $f(U) \subset V + \Lambda \cup \{+\infty\}$.

Определение 1.9. Отображение $f: X_\partial \to Y^\bullet$ называют квазиполунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если для любого $b \not\geq f(x_0)$ существует окрестность U точки $x_0 \in X$ такая, что выполняется условие $b \not\geq f(x_0)$ $\forall x \in U$.

Определение 1.10. Отображение $f: X_\partial \to Y^\bullet$ называют o-полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $x_n \to x_0$ в X;

2) существует последовательность $\{\varepsilon_n\} \subset Y$, $\{\varepsilon_n\} \to 0$ такая, что последовательность $\{f(x_n) + \varepsilon_n\}$ является невозростающей;

3) существует последовательность $\{g_n\} \subset Y$, $\{g_n\} \to 0$ такая, что $f(x_0) \leq f(x_n) + g_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Отображение $f: X_\partial \to Y^\bullet$ будем называть полунепрерывным снизу (соответственно квазиполунепрерывным снизу, o-полунепрерывным снизу), если оно является полунепрерывным снизу (соответственно квазиполунепрерывным снизу, o-полунепрерывным снизу) в каждой точке X_∂.

Приведем следствия из теоремы 1.

Следствие 1.1. Пусть X и Y - банаховы пространства, пространство Y полуупорядочено с помощью правильного конуса Λ, множество $X_\partial \subset X$ является компактным (относительно топологии, порожденной нормой), а отображение $f: X_\partial \to Y^\bullet$ квазиполунепрерывное снизу (o-полунепрерывное снизу). Тогда $Eff_\tau(X_\partial; f; \Lambda) \neq \varnothing$.

Следствие 1.2. Пусть X - рефлексивное пространство, Y - банахово пространство, полуупорядоченое с помощью правильного конуса Λ, множество X_∂ ограничено и слабо замкнуто в X, отображение $f: X_\partial \to Y^\bullet$ слабо квазиполунепрерывно снизу (o-полунепрерывное снизу). Тогда $Eff_\tau(X_\partial; f; \Lambda) \neq \varnothing$.

Постановка задачи и исследование ее разрешимости. Пусть $L^p(t_0, T; \mathbb{R}^m)$ – пространство управлений, а $W^{1,p}(t_0, T; \mathbb{R}^n)$ – пространство фазовых траекторий, где $1 < p < \infty$. Пусть U_∂ – некоторое подмножество допустимых управлений в пространстве $L^p(t_0, T; \mathbb{R}^m)$, а K – некоторое фиксированное множество в пространстве $W^{1,p}(t_0, T; \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим следующую задачу векторной оптимизации:

$$L(u, x) \to \Lambda_\tau - \inf, \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = f(u, x), \tag{2.2}$$

$$u \in U_\partial, \tag{2.3}$$

$$x \in K, \tag{2.4}$$

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \ \forall i \in [1, n], \tag{2.5}$$

где $L: L^p(t_0, T; \mathbb{R}^m) \times W^{1,p}(t_0, T; \mathbb{R}^n) \to L^p(t_0, T)$ – целевое отображение.

Всюду далее будем говорить, что задача (2.1)-(2.5) является регулярной, если существует хотя бы одна пара $(u,x)\in L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$, где $x=x(u)$ соответствующее решение системы (2.2) такое, что пара (u,x) удовлетворяет условиям (2.3)-(2.5). В этом случае пару (u,x) будем называть допустимой в задаче (2.1)-(2.5).

Обозначим через Ξ множество всех допустимых пар в задаче (2.1)-(2.5):

$$\Xi=\left\{(u,x)\in L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)\middle|\dot{x}=f(u,x),x(t_0)=x_0,u\in U_\partial,x\in K\right\}. \quad (2.6)$$

Всюду далее задачу векторной оптимизации (2.1)-(2.5) будем ассоциировать с тройкой (Ξ,L,Λ).

Введем для рассмотрения расширение отображения $L:\Xi\to L^p(t_0,T)$ на все пространство $L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$:

$$L(u,x)=\begin{cases}L(u,x),\ (u,x)\in\Xi,\\ +\infty,\ (u,x)\notin\Xi.\end{cases}$$

Будем говорить, что отображение $L:L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)\to L^p(t_0,T)$ ограничено снизу, если существует хотя бы один элемент $y\in Y$ такой, что $y\le_\Lambda L(u,x)$ для всех $(u,x)\in L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$.

Определение 2.1. Будем говорить, что последовательность пар $\{(u_k,x_k)\}_{k=1}^{\infty}\subset L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$ является слабо сходящейся к паре $(u_0,x_0)\in L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$ (сокращенно $(u_k,x_k)\xrightarrow{w}(u_0,x_0)$), если $u_k\to u_0$ слабо в $L^p\left(t_0,T;\square^m\right)$ и $x_k\to x_0$ слабо в $W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$ при $k\to\infty$.

Пару $(u^*,x^*)\in\Xi$ будем называть Λ_w-эффективным решением задачи (Ξ,L,Λ), если $\left(L(u^*,x^*)-\Lambda\right)\cap cl_w\,L(\Xi)=\left\{L(u^*,x^*)\right\}$, где $cl_w\,L(\Xi)$ - замыкание множества $L(\Xi)$ в слабой топологии пространства $L^p(t_0,T)$.

Таким образом, имеем:

$$L(u^*,x^*)\in\Lambda_w-\operatorname*{Inf}_{(u,x)\in\Xi}L(u,x).$$

Для определения условий, которые гарантируют существование эффективных решений сделаем некоторые предположения. Пусть

1) U_∂ – ограниченное слабо замкнутое множество в $L^p\left(t_0,T,\square^m\right)$;

2) система $\dot{x}=f(u,x)$ – система уравнений Каратеодори, правые части которых непрерывны по Липшицу относительно переменных x;

3) K – секвенциально слабо замкнутое множество в $W^{1,p}\left(t_0,T,\square^n\right)$;

4) целевое отображение $L:\Xi\to L^p(t_0,T)$ является секвенциально Λ_τ-полунепрерывным снизу относительно слабой топологии в пространстве $L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$;

5) задача (2.1)-(2.5) регулярна.

При таких предположениях для задачи (2.1)-(2.5) получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть U_∂ – ограниченное множество пространства $L^p\left(t_0,T;\square^m\right)$, K – секвенциально слабо замкнутое подмножество пространства $W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$ для всех $1<p<+\infty$, система $\dot{x}=f(u,x)$ относится к типу уравнений Каратеодори, правые части которых непрерывны по Липшицу относительно переменных x. Пусть целевое отображение $L:\Xi\to L^p(t_0,T)$ является секвенциально Λ_τ-полунепрерывным снизу относительно слабой топологии в пространстве $L^p\left(t_0,T;\square^m\right)\times W^{1,p}\left(t_0,T;\square^n\right)$. Пусть пространство $L^p(t_0,T)$ полуупорядочено некоторым правильным конусом Λ. Пусть для любых пар $(u,x)\in\Xi$ выполняется*

условие $\left\{L(u,x)\right\} = \Lambda_\tau - \liminf\limits_{(u_k,x_k)\xrightarrow{w}(u,x)} L(u_k,x_k)$. *Тогда* $Eff_\tau(\Xi;L;\Lambda) \neq \varnothing$, *если и только если задача регулярна.*

Доказательство. Очевидно, что если $Eff_\tau(\Xi;L;\Lambda) \neq \varnothing$, то задача (2.1)-(2.5) является регулярной.

Рассмотрим множество допустимых пар в задаче (2.1) – (2.5). Из теории дифференциальных уравнений известно, что решения уравнений Каратеодори при любом $u \in U_\partial \subset L^p(t_0,T,\mathbb{R}^m)$ образуют ограниченное множество в пространстве $W^{1,p}(t_0,T,\mathbb{R}^n)$ для всех $1 < p < +\infty$. Согласно теореме Банаха о слабой компактности ограниченного множества в рефлексивном банаховом пространстве и вследствие секвенциальной слабой замкнутости множества Ξ, имеем: Ξ – секвенциально слабо компактное множество в пространстве $L^p(t_0,T;\mathbb{R}^m)\times W^{1,p}(t_0,T;\mathbb{R}^n)$. Таким образом, из любой последовательности $\{(u_k,x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \Xi$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, что означает: существует такая пара $(u^*,x^*) \in L^p(t_0,T;\mathbb{R}^m)\times W^{1,p}(t_0,T;\mathbb{R}^n)$, что при $k\to\infty$ выполняется $(u_k,x_k)\xrightarrow{w}(u^*,x^*)$ (с точностью до подпоследовательности). Т.к. при каждом k выполняется $(u_k,x_k)\subset\Xi$, а множество $U_\partial \times K$ является секвенциально слабо замкнутым, то, очевидно, что $(u^*,x^*)\in U_\partial \times K$. По условию пара (u_k,x_k) удовлетворяет системе уравнений (2.2) при любом $k \in \mathbb{N}$. Используя теорему вложения Соболева, получим что пространства $W^{1,p}(t_0,T;\mathbb{R}^n)$ компактно вложены в $C(t_0,T;\mathbb{R}^n)$ для всех $1 < p < +\infty$. Переходя к пределу в правой и левой частях уравнений и используя свойство слабой сходимости последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p(t_0,T;\mathbb{R}^m)$, получим, что пара (u^*,x^*) удовлетворяет системе уравнений (2.2). Таким образом, $(u^*,x^*)\in\Xi$.

Учитывая, что целевое отображение $L:\Xi\to L^p(t_0,T)$ является секвенциально Λ_τ-полунепрерывным снизу относительно слабой топологии в пространстве $L^p(t_0,T;\mathbb{R}^m)\times W^{1,p}(t_0,T;\mathbb{R}^n)$ и применяя теорему 1, получим, что при условии $\left\{L(u,x)\right\} = \Lambda_\tau - \liminf\limits_{(u_k,x_k)\xrightarrow{w}(u,x)} L(u_k,x_k)$, $\forall (u,x)\in\Xi$, выполняется $Eff_\tau(\Xi;L;\Lambda)\neq\varnothing$.

Теорема доказана.

Приведем следствия из теоремы 2.

Следствие 2.1. Пусть выполняются требования теоремы 2 относительно системы уравнений $\dot{x} = f(u,x)$. Пусть множества U_∂ и K являются компактными относительно сильных топологий пространств соответственно $L^p(t_0,T;\mathbb{R}^m)$ и $W^{1,p}(t_0,T;\mathbb{R}^n)$, целевое отображение $L:\Xi\to L^p(t_0,T)$ квазиполунепрерывно снизу (o -полунепрерывно снизу). Тогда $Eff_\tau(\Xi;L;\Lambda)\neq\varnothing$.

Следствие 2.2. Пусть выполняются предположения теоремы 2 относительно системы уравнений $\dot{x} = f(u,x)$ и множеств U_∂, K. Пусть целевое отображение $L:\Xi\to L^p(t_0,T)$ слабо квазиполунепрерывно снизу (o -полунепрерывно снизу). Тогда $Eff_\tau(\Xi;L;\Lambda)\neq\varnothing$.

Применение полученных результатов. Покажем применение полученных выше результатов к оптимизации динамики вибросистемы. Объект управления представляет собой вибросистему некоторой конструкции, встроенную в уплотняющую машину каткового типа. Конструкция вибросистемы была подробно описана в [1].

Пусть $n, m_i, m_{звi}, \lambda, R_i, r_i, E_i$ - заданные массовые и геометрические характеристики вибросистемы, $k_i, C_i, N_i, P_i, I_{i\partial}, I_{izв}$ $\forall i \in [1, 2n+2]$ - константы при заданных массовых и геометрических характеристиках вибросистемы; $M(x)$ - функция, равномерно непрерывная относительно x.

Математическая модель объекта управления имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = x_{n+2};\\
.....;\\
\dot{x}_{n+1} = x_{2n+2};\\
\dot{x}_{n+2} = \dfrac{1}{I_{1\partial}}\Big[u_1 + k_1\cdot\sin x_1 - C_1\sin\left(x_1-\beta_1\right)\cdot x_{2n+2}^2 - C_1 f_{2n+2}(u,x)\cos\left(x_1-\beta_1\right)\Big];\\
\dot{x}_{n+3} = \dfrac{1}{I_{2\partial}}\Big[u_2 + k_2\cdot\sin x_2 - C_2\sin\left(x_2-\beta_2\right)\cdot x_{2n+2}^2 - C_2 f_{2n+2}(u,x)\cos\left(x_2-\beta_2\right)\Big];\\
.....\\
\dot{x}_{2n+1} = \dfrac{1}{I_{n\partial}}\Big[u_n + k_n\cdot\sin x_n - C_n\sin\left(x_n-\beta_n\right)\cdot x_{2n+2}^2 - C_2 f_{2n+2}(u,x)\cos\left(x_n-\beta_n\right)\Big];\\
\dot{x}_{2n+2} = \dfrac{1}{M(x)}\left(\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_{n+i+1}^2\sin\left(x_i-\beta_i\right) - \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{C_i^2}{2I_{i\partial}}x_{2n+2}^2\sin\left(2x_i-2\beta_i\right) - \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{C_i}{I_{i\partial}}u_i\cos\left(x_i-\beta_i\right)+\\
+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{C_i}{I_{i\partial}}k_i\sin(x_i)\cos\left(x_i-\beta_i\right)+u_{n+1}+\sum\limits_{i=1}^{n}N_i\cdot\sin\left(\beta_i\right)+\sum\limits_{i=1}^{n}P_i\cdot\left[R_i\sin\left(\beta_i\right)\right]
\end{array}\right);
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

$$
u\in U_\partial = \left\{u\in L^2\left(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}\right)\middle|\, m_{\min}\le u_i(t)\le m_{\max}\ п.в.\ на\ [t_0,T],\ m_{\min}=-m_{\max},\forall i\in[1,n+1]\right\},
\tag{3.2}
$$

$$
x\in K = \left\{x\in H^1\left(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}\right)\middle|\, \alpha_{\min}\le x_i(t)\le\alpha_{\max},\ \alpha_{\min}=-\alpha_{\max},\forall i\in[n+2,2n+2]\right\},
\tag{3.3}
$$

$$
x_i(t_0)=x_0,\ \forall i\in[1,2n+2].
\tag{3.4}
$$

Очевидно, что объект управления (3.1)-(3.4) удовлетворяет предположениям 1)-4) предыдущего пункта.

Пусть Λ конус положительных элементов в $L^2(t_0,T)$, т.е.:

$$
\Lambda = \left\{ f\in L^2(t_0,T):\ f(t)\ge 0\ п.в.\ на\ (t_0,T)\right\}.
$$

Как известно из [3], конус Λ является правильным.

Для каждой пары $(u,x)\in L^2\left(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}\right)\times H^1\left(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}\right)$ определим целевое отображение $L: L^2\left(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}\right)\times H^1\left(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}\right)\to L^2(t_0,T)$ по правилу:

$$
L\left(u(t),x(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\begin{array}{l}
m_i\left[\begin{array}{l}
x_{2n+2}^2(t)R_i\cos x_{n+1}(t)+\dot{x}_{2n+2}(t)R_i\sin x_{n+1}(t)+\\
+x_{n+i+1}^2(t)r_i\cos x_i(t)+\dot{x}_{n+i+1}(t)r_i\sin x_i(t)
\end{array}\right]+\\
+m_{збі}\dfrac{R_i}{2}\left[\begin{array}{l}
\dot{x}_{2n+2}(t)\sin\left(x_{n+1}(t)+\lambda(i-1)\right)+\\
+x_{2n+2}^2(t)\cos\left(x_{n+1}(t)+\lambda(i-1)\right)
\end{array}\right]
\end{array}\right).
\tag{3.5}
$$

Функция $L\left(u(t),x(t)\right)$ с физической точки зрения означает вертикальную проекцию суммарной возмущающей силы вибросистемы в момент времени t.

Множество всех допустимых пар в задаче (3.1)-(3.5) имеет вид:

$$
\Xi = \left\{(u,x)\in L^2\left(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}\right)\times H^1\left(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}\right)\middle|\, \dot{x}=f(u,x), x(t_0)=x_0, u\in U_\partial, x\in K\right\}.
\tag{3.6}
$$

Тогда задачу векторной оптимизации для объекта (3.1)-(3.5) сформулируем следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&L(u,x)\to\Lambda_\tau - Inf,\\
&(u,x)\in\Xi.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

С физической точки зрения это означает попытку минимизировать возмущающую силу на всем промежутке времени $[t_0,T]$, т.е. увеличить давление катка на уплотняемую среду втечение всего промежутка времени работы вибросистемы.

Поскольку объектом управления выступает реальная механическая вибросистема, то всюду далее будем считать, что задача (3.1)-(3.5) регулярна.

Для доказательства разрешимости задачи (3.1)-(3.5) рассмотрим свойства целевого отображения (3.5). Учитывая теорему о вложении Соболева, получим, что функция $x(t)$, как элемент пространства $H^1\left(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}\right)$, является непрерывной. Согласно определению пространства $H^1\left(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}\right)$, имеем:

$\dot{x} \in L^2\left(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}\right)$. Взяв во внимание вид целевого отображения (3.5) видим, что $L(u,x) \in L^2(t_0,T)$ для любых пар $(u,x) \in \Xi$.

Более того, используя вид уравнений системы (3.1) и учитывая выполнение условий Каратеодори можно показать, что существует суммируемая на $[t_0,T]$ функция $M(t)$ такая, что выполняется неравенство $\left|L\left(u(t),x(t)\right)\right| \le M(t)$ почти для всех $t \in [t_0,T]$. Отсюда следует, что $L(u,x) \in L^{\infty}(t_0,T)$.

Исходя из результатов, полученных в работе [3], можно сделать вывод, что отображение $L(u,x)$ является слабо непрерывным относительно слабой топологии в пространстве $L^2\left(t_0,T;\mathbb{R}^{n+1}\right) \times H^1\left(t_0,T;\mathbb{R}^{2n+2}\right)$, что означает: из того, что $(u_k,x_k) \xrightarrow{w} (u^*,x^*)$ следует $L(u_k,x_k) \to L\left(u^*,x^*\right)$ слабо в $L^2(t_0,T)$ при $k \to \infty$.

Из того, что $L(u_k,x_k) \to L\left(u^*,x^*\right)$ слабо в $L^2(t_0,T)$ при $k \to \infty$ следует, что выполняется условие $\left\{L(u,x)\right\} = \Lambda_w - \underset{(u_k,x_k) \xrightarrow{w} (u,x)}{\liminf} L(u_k,x_k)$ для всех пар $(u,x) \in \Xi$. Применяя к задаче (3.1)-(3.5) теорему 2, делаем вывод, что множество Λ_τ -эффективных решений $Eff_\tau\left(\Xi; L; \Lambda\right)$ в задаче (3.1)-(3.5) непусто.

Выводы. Для задач векторной оптимизации объекта управления, который описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями и ограничениями типа неравенств на управления и фазовые траектории получены достаточные условия их разрешимости в классе Λ_τ -эффективных решений. Приведено применение полученных результатов на примере векторной оптимизации динамики вибросистемы.

Библиографические ссылки

1. **Богомаз В.Н.** Об одной задаче оптимизации механической вибросистемы /В.Н. Богомаз // Питання прикладної математики та математичного моделювання: зб. наук. праць. – Д., 2010. – С. 23–40.
2. **Богомаз В.Н.** Необходимые условия экстремума в задаче оптимизации механической вибросистемы /В.Н. Богомаз // Вісник Дніпропетровського ун-ту, Моделювання – 2010. Т.18, №2 – С. 90–102.
3. **Богомаз В.Н.** Численный анализ задачи оптимального управления механической вибросистемой / В.Н. Богомаз, И.В. Шаповал // Вісник Дніпропетровського ун-ту, Моделювання – 2011. Т.18, №2 – С. 30–43.
4. **Красносельский М.А.** Положительные решения операторних уравнений. /М.А. Красносельский – М., 1962. – 396с.
5. **Kogut P.I.** On the existence of efficient solutions of vector optimization problems in Banach spaces / P.I. Kogut, R. Manzo, I.V. Nechay// Диференціальні рівняння та їх застосування. – 2008 – № 5 – С. 105–121.
6. **Luc D.T.** Theory of vector optimization / Luc D.T. – Lnems 319: Springer-Verlag, 1989. – 343p.
7. **Ehrgott M.** Multicriteria Optimization / Ehrgott M. – Berlin: Springer, 2005. – 323 p.

Надійшла до редколегії 28.01.11.