УДК 519.85

О. М. Кісельова*, В. О. Строєва **
**Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*
***Дніпродзержинський державний технічний університет*

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ НЕЛІНІЙНИХ БАГАТОПРОДУКТОВИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Розроблено програмний продукт реалізації алгоритмів розв'язання нелінійних неперервних багатопродуктових задач оптимального розбиття множини Ω з n-вимірного евклідового простору на її неперетинні підмножини при обмеженнях, який дозволяє розв'язувати різні класи задач із різних предметних областей, що зводяться у математичній постановці до розглянутих.

Разработан программный продукт реализации алгоритмов решения нелинейных непрерывных многопродуктовых задач оптимального разбиения множества Ω из n-мерного евклидового пространства на его непересекающиеся подмножества при ограничениях, применяемый для решения разных классов задач из различных предметних областей, сводящихся в математической постановке к рассмотренным.

Created software that implements algorithms of the decision of a non-linear continuous multigrocery problem of a set Ω from n -dimensional Euclidean space on its not crossed subsets with its limitations. software solves the different classes of problems, including a simpler and tasks from different areas.

Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, оптимальне розбиття множин, багатопродуктова задача, задачі розміщення.

Вступ. Велика кількість актуальних теоретичних та прикладних оптимізаційних задач може бути зведена в математичній постановці до неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ). Розробці методів розв'язання задач оптимального розбиття, що належать до маловивченого класу задач нескінченновимірного математичного програмування з булевими значеннями змінних, їх модифікаціям та узагальненням, присвячені чисельні публікації Дніпропетровської наукової школи. У цих публікаціях сформульовано нові класи математичних моделей оптимального розбиття множин. Серед таких:

- детерміновані лінійні та нелінійні, однопродуктові та багатопродуктові задачі ОРМ при обмеженнях, як із заданим розміщенням центрів підмножин, так і з відшуканням варіанта їх розміщення;
- задачи ОРМ в умовах невизначеності;
- динамічні задачі з критеріями оптимальності;
- неперервні задачі про кулькове покриття, які зводяться до задач ОРМ.

До розв'язання сформульованих класів задач розбиття запропоновано єдиний підхід. Його основна ідея полягає у переході від початкових нескінченновимірних задач оптимізації, через функціонал Лагранжа, до допоміжних скінченновимірних недиференційовних задач максимізації або недиференційовних максимінних задач, для чисельного розв'язання яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційовної оптимізації, а саме, різні модифікації r-алгоритму Шора.

У роботах [1–4] побудовані нові математичні моделі нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множини на підмножини як з фіксованими центрами, так і з розміщенням центрів цих підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей та нерівностей, розроблено та обґрунтувано методи та алгоритми їх розв'язання.

Метою цієї роботи є розробка програмного продукту, який реалізовує всі алгоритми, розроблені для задач з [1–4], дозволяє розв'язувати задачі, що розглядалися раніше в межах досліджень Дніпропетровської наукової школи, а також задачі з різних предметних областей, що зводяться в математичній постановці до розглянутих.

Постановка задачі. Розробити програмний продукт для розв'язання різних класів неперервних нелінійних багатопродуктових задач ОРМ, а саме:

- нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з n-вимірного евклідового простору E_2 на $N \cdot M$ підмножин, що не перетинаються з фіксованими центрами $\tau_1,...,\tau_N$ цих підмножин без обмежень, де M – кількість продуктів;
- нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з n-вимірного евклідового простору E_2 на $N \cdot M$ підмножин, що не перетинаються з розміщенням центрів $\tau_1,...,\tau_N$ цих підмножин без обмежень;
- нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з n-вимірного евклідового простору E_2 на $N \cdot M$ підмножин, що не перетинаються з фіксованими центрами $\tau_1,...,\tau_N$ цих підмножин з

© *О. М. Кісельова, В. О. Строєва, 2013*

обмеженнями;

- нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з n-вимірного евклідового простору E_2 на $N \cdot M$ підмножин, що не перетинаються з розміщенням центрів $\tau_1,...,\tau_N$ цих підмножин з обмеженнями.

При цьому обмеження у вищевизначених задачах можуть бути таких видів:

- обмеження - рівності;
- обмеження - нерівності.

В усіх перелічених задачах функції попиту та метрики допускаються різними для різних видів продуктів, а саме:

- функція метрики задається різною для різних видів продуктів;
- функція попиту задається різною для різних видів продуктів;
- функції метрики та попиту задаються різними для різних видів продуктів.

Програмний продукт складається із двох модулів. Перший − програмний модуль – у частині програмування математичних методів та чисельних процедур реалізовано у середовищі Microsoft Visual Studio мовою Visual Fortran 6.5, а другий − графічний модуль ORMDrawer – мовою C++ у середовищі Borland Builder C++6 для операційної системи Windows, у частині графічної візуалізації.

Розв'язання модельних задач. Розроблений програмний продукт реалізовано для таких модельних нескінченновимірних транспортних задач.

У заданій області дев'ять підприємств виробляють однорідну продукцію трьох видів для розміщеного в цій області із заданою щільністю споживача, з обмеженнями на потужність підприємств у вигляді рівностей та нерівностей. Вартість транспортування одиниці продукції до споживача задається у вигляді евклідової, манхетенської або метрики Чебишева, залежно від виду продукції. Функція попиту на продукцію дорівнює одиниці або задається аналітично для кожного продукту. Наведемо результати розв'язання розглянутої задачі, а саме багатопродуктової задачі ОРМ із фіксованими центрами підмножин та аналогічної багатопродуктової задачі ОРМ із розташуванням центрів підмножин, та порівняємо їх.

Модельна задача А.1. Задано множину $\Omega = \{(x,y): 0 \le x \le 10, 0 \le y \le 10\}$ споживачів трьох видів продукції, яка може виготовлятися дев'ятьма підприємствами. Вартість транспортування одиниці продукції з і-го підприємства $i = \overline{1,9}$ до споживача (x,y) задається відповідно до виду продукції:

$$c^j(x,y,\tau_i) = \begin{cases} \sqrt{\left(x-\tau_i^{(1)}\right)^2 + \left(y-\tau_i^{(2)}\right)^2}, & \text{якщо } j=1; \\ \max\left\{\left|x-\tau_i^{(1)}\right|, \left|y-\tau_i^{(2)}\right|\right\}, & \text{якщо } j=2; \\ \left|x-\tau_i^{(1)}\right| + \left|y-\tau_i^{(2)}\right|, & \text{якщо } j=3. \end{cases}$$

Попит $\rho^j(x,y)$ на продукцію кожного виду розподілений в області Ω з відповідними щільностями:

$$\rho^1(x,y) = \frac{1}{\ln\left|(x-y)^2 - 110.003\right|}, \quad \rho^2(x,y) = \frac{0.4}{\left|tg\left|x-y-110.003\right|\right|}, \quad \rho^3(x,y) = \frac{50}{\left|x-y+110.003\right|}.$$

Функції $\varphi_i^j(Y_i^j)$, які описують залежність вартості виробництва *j*-го виду продукції на *i*-му підприємстві від його потужності, мають вигляд

$$\varphi_i^j(Y_i^j) = \left(Y_i^j\right)^2, \quad i = \overline{1,\ 9},\ j = 1,2,3,$$

де потужність Y_i^j *i*-го підприємства з виробництва *j*-го виду продукції визначається за формулою

$$Y_i^j = \iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x,y)\,dxdy.$$

Потужність *i*-го пункту виробництва за всіма видами продукції визначається сумарним попитом споживачів, які належать Ω_i^j, $i = \overline{1,9}$, та для пунктів виробництва $i = 1,2,4,5,7,9$ не повинна перевищувати задані обсяги, тобто на потужності підприємств накладені такі обмеження:

$$0 \le \sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x,y)\,dxdy \le b_i, \quad i = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,$$

$$b_1 = 100,\ b_2 = 60,\ b_4 = 80,\ b_5 = 17,\ b_7 = 100,\ b_9 = 12,$$

а для пунктів виробництва з номерами $i = 3,\ 6,\ 8$ повинна дорівнювати заданим обсягам: $\sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x,y)\,dxdy = b_i,\ i = 3,\ 6,\ 8,$

$$b_3 = 36,\ b_6 = 5,\ b_8 = 15.$$

Необхідно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування дев'ятьма підприємствами за кожним видом продукції, тобто на підмножини Ω_i^j, $i=\overline{1,\ 9}$, $j=\overline{1,\ 3}$, так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції та доставку її до споживача:

$$F\left(\{\{\Omega_1^1,...,\ \Omega_9^1;\Omega_1^2,...,\ \Omega_9^2;\Omega_1^3,...,\ \Omega_9^3\}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{9}\left[\varphi_i^j\left(\iint\limits_{\Omega_i^j}\rho^j(x,y)dxdy\right)+\iint\limits_{\Omega_i^j}c^j(x,y,\tau_i)\rho^j(x,y)dxdy\right]\cdot$$

Не є виключенням той випадок, коли деякі з підмножин Ω_i^j, $i=\overline{1,\ 9}$, $j=\overline{1,\ 3}$, опиняться порожніми.

Множина Ω покривалася сіткою з вузлами $(i,\ j)$, $i=1,...,21$, $j=1,...,21$.

Як початкові значення двоїстих змінних задано $\psi_i^{(0)}=0$, $i=\overline{1,9}$; початкові значення потужностей: $Y_1^{j(0)}=10$, $Y_2^{j(0)}=100$, $Y_3^{j(0)}=10$, $Y_4^{j(0)}=10$, $Y_5^{j(0)}=100$, $Y_6^{j(0)}=10$, $Y_7^{j(0)}=10$, $Y_8^{j(0)}=100$, $Y_9^{j(0)}=10$, а також задані координати розміщення підприємств:

$$\tau^0=\begin{pmatrix}0.7;\ 1.4;\ 4.8;\ 8.7;\ 5.1;\ 8.9;\ 2.5;\ 5.8;\ 8.5\\ 2.4;\ 5.6;\ 4.2;\ 2.5;\ 7.5;\ 8.3;\ 9.1;\ 1.5;\ 5.7\end{pmatrix}$$

Умовою завершення обчислень є виконання нерівності

$$\left\|\left(Y^{(k)},\psi^{(k)}\right)-\left(Y^{(k+1)},\psi^{(k+1)}\right)\right\|\le\varepsilon,\quad \varepsilon=10^{-3}\cdot$$

За *146* ітерацій отримано:

– оптимальне розбиття множини споживачів Ω:

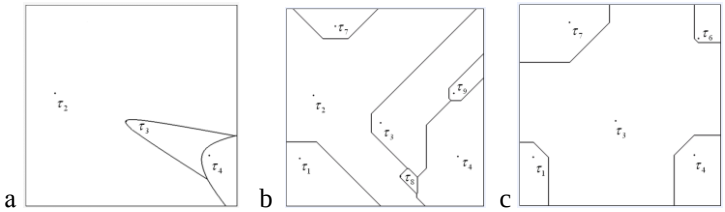


Рис. А.1. ОРМ Ω на зони обслуговування кожним із 9 підприємств із фіксованими центрами по трьох видах продукції для модельної задачі А.1

– максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^*\approx 4646.87$;

– мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_*\approx 4668.40$;

– оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств мають відповідні значення 24.82; 20.81; 35.93; 24.41; 16.98; 4.95; 24.23; 14.65; 11.89.

Модельна задача А.2. У постановці першої модельної задачі задамо функцію попиту $\rho^j(x,y)=1$, $j=1,\ 2,\ 3$. За таких умов, після *204-ї* ітерацій, отримали такі результати:

– оптимальне розбиття множини споживачів Ω:

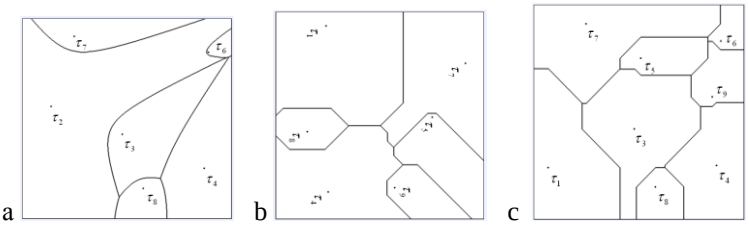


Рис. А.2. ОРМ Ω на зони обслуговування кожним із 9 підприємств із фіксованими центрами по трьох видах продукції для модельної задачі А.2

– максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^*\approx 14254.00$;

– мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_*\approx 14241.49$;

– оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств відповідно дорівнюють: 53.65; 52.89; 35.93; 54.46; 16.94; 4.95; 54.02; 14.91; 11.98.

За результатами розглянутих модельних задач *А.1 – А.2* можна зробити такі висновки:

1) для кожної із задач виконуються умови розв'язуваності задачі, тобто загальна оптимальна потужність дев'яти підприємств, яка отримана за алгоритмом розв'язку (для *задачі А.1* це *178.67*, а для *задачі А.2* це *299.73*) не перевищує *S = 425* – суми заданих обсягів потужностей підприємств;

2) отримані оптимальні потужності 3-го, 6-го та 8-го підприємства у кожній із задач відповідають обмеженням у вигляді рівностей, тобто дорівнюють заданим значенням, а саме $Y_3^*\approx 36$, $Y_6^*\approx 5$, $Y_8^*\approx 15$;

3) у *задачі А.1* функція попиту $\rho^j(x,y) \not\equiv 1,\ j=\overline{1,3},$ тому деякі з підмножин, за рахунок вигляду функції ρ^j, виявилися порожніми, що не суперечить постановці вихідної задачі. Так, наприклад, на рис. *А.1, а* порожніми є підмножини з номерами 1, 5, 6, 7, 8, 9 і т.п.

Модельна задача А.3. У постановці модельної задачі *А.1* задамо умову розмістити підприємства. Тоді, якщо початкові координати розміщення підприємств $\tau_i^{(0)}=(0;0)$, $i=\overline{1,9}$, то після *431-ї* ітерації отримаємо такі результати:

– оптимальне розбиття множини споживачів Ω на дев'ять зон обслуговування кожним із дев'яти підприємств по трьох видах продукції представлено на рис. *А.3*:

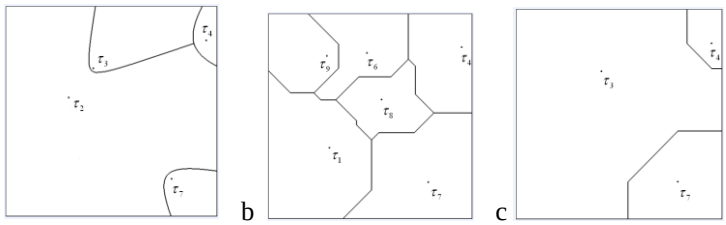


Рис. А.3. ОРМ Ω на зони обслуговування кожним із 9 підприємств із розміщенням їх центрів по трьох видах продукції для модельної задачі А.3

– максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 4558.92$;

– мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 4304.83$;

– оптимальні координати розміщених підприємств:

τ_1^* = (3.01; 3.45), τ_2^* =(2.99; 5.63), τ_3^* = (4.16; 7.02),

τ_4^* = (9.5; 8.35), τ_5^* =(2.21; 2.45), τ_6^* = (4.86; 8.07),

τ_7^* = (7.86; 1.76), τ_8^* =(5.57; 5.79), τ_9^* = (2.88; 7.92);

– оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств: 22.7; 19.5; 35.98; 22.43; 16.92; 4.93; 22.33; 14.91; 11.99.

Модельна задача А.4. У постановці *модельної задачі А.3* задамо функцію попиту однаковою для кожного виду продукції, а саме $\rho^j(x,y)=1$, $j=1,\ 2,\ 3,$ тоді після *282-ї* ітерації отримаємо такі результати:

– максимальне значення функціонала двоїстої задачі $G^* \approx 14125.5$;

– мінімальне значення функціонала прямої задачі $F_* \approx 14113.44$;

– оптимальні координати розміщених підприємств:

τ_1^* = (2.59; 7.32), τ_2^* =(2.96; 5.14), τ_3^* = (7.36; 8.37),

τ_4^* = (7.25; 1.61), τ_5^*=(1.58; 0.96), τ_6^* = (8.17; 9.2),

τ_7^* = (7.78; 5.38), τ_8^* =(1.32; 3.54), τ_9^* = (3.75; 2.66);

– оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств: 54; 52.96; 35.98; 54.06; 16.83; 4.96; 53.96; 14.97; 11.99.

Оптимальне розбиття множини споживачів Ω на дев'ять зон обслуговування кожним із дев'яти підприємств по трьох видах продукції представлено на рис. *А.4*.

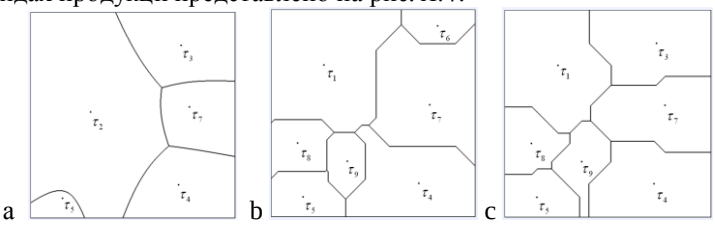


Рис. А.4. ОРМ Ω на зони обслуговування кожним із 9 підприємств із розміщенням їх центрів по трьох видах продукції для модельної задачі А.4

За результатами розглянутих модельних задач *А.3 - А.4* можна зробити такі висновки:

1) для кожної із задач виконуються умови розв'язуваності, тобто загальна оптимальна потужність дев'яти підприємств, яка отримана за алгорит-мом розв'язку (для *задачі А.3* це 171.69, а *для задачі А.4* це 299.71), не перевищує S = 425 – суми заданих потужностей підприємств;

2) отримані оптимальні потужності 3-го, 6-го та 8-го підприємства у кожній із задач відповідають обмеженням у вигляді рівностей, тобто дорів-нюють заданим значенням, а саме $Y_3^* \approx 36$, $Y_6^* \approx 5$, $Y_8^* \approx 15$;

3) у *задачі А.3* для $\rho^j(x,y) \neq 1,\ j=\overline{1,3}$ деякі з підмножин, за рахунок вигляду функції ρ^j, виявилися порожніми, що не суперечить постановці вихідної задачі. Так, наприклад, на рис. *А.4, а* порожніми є підмножини з номерами 1, 5, 6, 8, 9 і т.п.

Отже, у загальному підсумку розглянутих модельних задач *А.1 - А.4* зазначимо таке:

1) кількість ітерацій у задачах із різним попитом на продукцію кожного з видів (*модельні задачі А.1, А.3*) більша за кількість ітерацій, отриманих при розв'язанні відповідних задач з однаковим попитом $\rho^j(x,y)=1,\ j=\overline{1,3}$, (*модельні задачі А.2, А.4*);

2) оптимальне значення функціоналів прямої та двоїстої задач із розміщеними підприємствами (*модельні задачі А.1, А.2*) більше за відповідні значення у випадку з умовою розміщення центрів підприємств (*модельні задачі А.3, А.4*).

Висновки. На основі розроблених раніше методів та алгоритмів розв'язання неперервних нелінійних багатопродуктових задач ОРМ створено програмний продукт. Наведено результати його застосування до розв'язання неперервних нелінійних багатопродуктових задач ОРМ, а саме до задач розміщення підприємств із одночасним розбиттям регіону, неперервно заповненого споживачами, на області споживачів, а також до задач розбиття з фіксованими центрами підприємств. Функції попиту та вартості транспортування одиниці продукції можуть бути різними для різних видів продукції. Нелінійність критерію оптимальності досліджуваних задач дозволяє більш адекватно моделювати певні реальні процеси, тому розроблений програмний продукт може бути застосований до розв'язання прикладних задач із різних предметних областей, що зводяться в математичній постановці до розглянутих.

Бібліографічні посилання

1. **Кісельова О.М.** Розв'язання нелінійної неперервної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин з розташуванням центрів підмножин: зб. наук. пр. / О.М. Кісельова, В.О. Строєва // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2010. – С. 155–164.
2. **Кісельова О.М.** Розв'язання нелінійних неперервних багатопродуктових задач оптимального розбиття множин з фіксованими центрами підмножин: зб. наук. пр. / О.М. Кісельова, В.О. Строєва // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2011. – С. 151–166.
3. **Киселёва Е.М.** Алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств / Е.М. Киселёва, В.А. Строева // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 40–53.
4. **Кісельова О.М.** Оптимальне розміщення базових станцій сумісного використання (Network sharing) декількома операторами мобільного зв'язку підмножин: зб. наук. пр. / О.М. Кісельова, В.О. Строєва // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2012. – С. 143–154.

Надійшла до редколегії 21.08.2013 р.